

**Соглашение об использовании**

Материалы данного файла могут быть использованы без ограничений для написания собственных работ с целью последующей сдачи в учебных заведениях.

Во всех остальных случаях полное или частичное воспроизведение, размножение или распространение материалов данного файла допускается только с письменного разрешения администрации проекта <http://www.vzfeiinfo.ru/>.

## Вариант 4

### Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 1} dx.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 9}{x - 1} dx &= \int \frac{x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 3(x - 1) - 6}{x - 1} dx = \int \left( x^2 - 4x + 3 - \frac{6}{x - 1} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x - 6 \ln|x - 1| + C = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \ln(x - 1)^6 + C. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \ln(x - 1)^6 + C.$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \frac{(2 \ln x + 1)^3 dx}{x}.$$

**Решение.**

Вычислим интеграл, используя метод замены переменной:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(2 \ln x + 1)^3 dx}{x} &= \left. \begin{array}{l} 2 \ln x + 1 = t \\ \frac{2dx}{x} = dt \\ \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2} \\ t_1 = 2 \ln 1 + 1 = 1 \\ t_2 = 2 \ln e + 1 = 3 \end{array} \right| = \int_1^3 \left( t^3 \cdot \frac{dt}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{1}{8} t^4 \Big|_1^3 = \\ &= \frac{1}{8} (81 - 1) = 10; \end{aligned}$$

**Ответ:** 10.

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 e^{x^3} x^5 dx.$$

**Решение.**

Воспользуемся методом замены переменной:

$$\int_0^1 e^{x^3} x^5 dx = \int_0^1 e^{x^3} x^3 \cdot x^2 dx = \left. \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{dt}{3} \\ t_1 = 0^3 = 0 \\ t_2 = 1^3 = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_0^1 e^t t dt = \left. \begin{array}{l} u = t \quad du = dt \\ dv = e^t dt \quad v = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{3} \left( e^t t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) =$$
$$= \frac{1}{3} \left( e^t t \Big|_0^1 - e^t \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{3} (e - 0 - e + e^0) = \frac{1}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{1}{3}$ .

4. Решить дифференциальное уравнение:

$$7xydx = (y^2 + 7x^2)dy.$$

**Решение.**

$$7xydx = (y^2 + 7x^2)dy;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7xy}{y^2 + 7x^2};$$

Это однородное уравнение первого порядка.

Пусть  $z = \frac{y}{x}$ ;  $y = xz$ ;  $y' = z + xz'$ ; тогда:

$$z + xz' = \frac{7x^2z}{x^2z^2 + 7x^2};$$

$$z + xz' = \frac{7z}{z^2 + 7};$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{7z - 7z - z^3}{z^2 + 7};$$

$$\frac{(z^2 + 7)dz}{z^3} = -\frac{dx}{x};$$

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{7}{z^3}\right)dz = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \left(\frac{1}{z} + \frac{7}{z^3}\right)dz = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| - \frac{7}{2z^2} = -\ln x + C \quad \text{или} \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{7x^2}{2y^2} = -\ln x + C - \text{общий интеграл исходного}$$

уравнения.

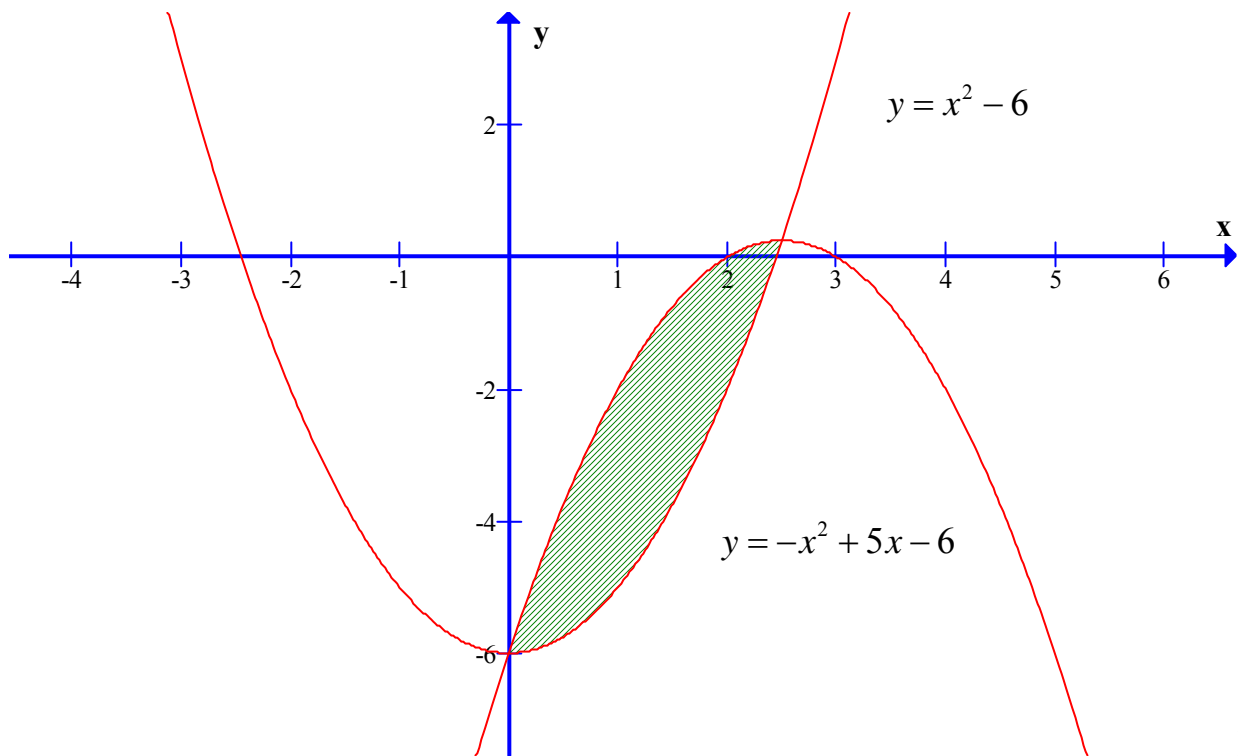
**Ответ:**  $\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{7x^2}{2y^2} = -\ln x + C.$

**5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 6, \quad y = -x^2 + 5x - 6.$$

**Решение.**

Построим графики функций и найдем пределы интегрирования:



Пр

делы интегрирования:

$$x^2 - 6 = -x^2 + 5x - 6;$$

$$2x^2 - 5x = 0;$$

$$x(2x - 5) = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 2,5. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2,5} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6) dx = \int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x) dx = \left( -2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2,5} = \\ &= \left( -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^3 + \frac{5}{2} \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 \right) = \left( \frac{5}{2} \right)^3 \cdot \left( -\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{125}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{125}{24}. \end{aligned}$$

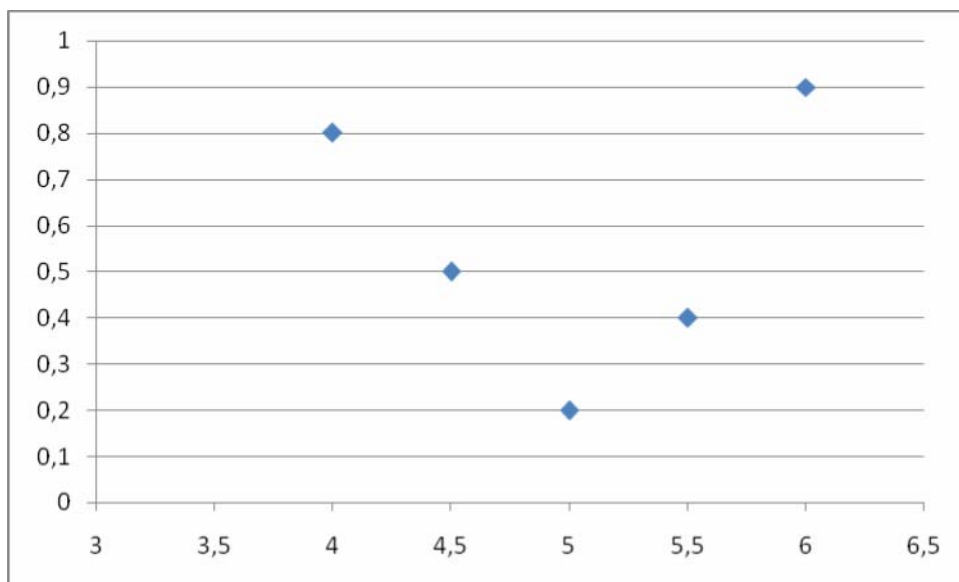
**Ответ:**  $\frac{125}{24}$ .

6. Экспериментальные данные о значениях переменных  $x$  и  $y$  приведены в таблице:

$x_i$	4	4,5	5	5,5	6
$y_i$	0,8	0,5	0,2	0,4	0,9

В результате их выравнивания получена функция  $y = (x - 5)^2$ . Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью  $y = ax + b$  (найти параметры  $a$  и  $b$ ). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

**Решение.**



Для определения коэффициентов линейной зависимости используют формулы:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Построим и заполним вспомогательную таблицу:

$n$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$y_i^*$	$\tilde{y}_i$	$(y_i^* - y_i)^2$	$(\tilde{y}_i - y_i)^2$
1	4	0,8	16	3,2	0,54	1,00	0,0676	0,0400
2	4,5	0,5	20,25	2,25	0,55	0,25	0,0025	0,0625
3	5	0,2	25	1	0,56	0,00	0,1296	0,0400
4	5,5	0,4	30,25	2,2	0,57	0,25	0,0289	0,0225
5	6	0,9	36	5,4	0,58	1,00	0,1024	0,0100

$\Sigma$	25	2,8	127,5	14,05	2,8	2,50	0,331	0,175
----------	----	-----	-------	-------	-----	------	-------	-------

Используя полученные значения, имеем:

$$\begin{cases} 127,5a + 25b = 14,5, \\ 25a + 5b = 2,8. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$a = 0,02; \quad b = 0,46.$$

Т.е.

$$y = 0,02x + 0,46.$$

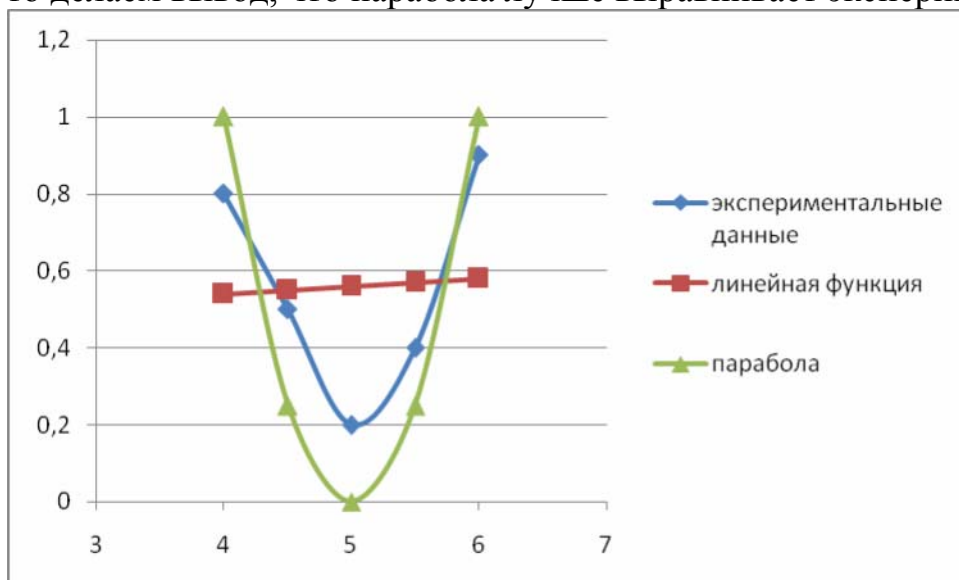
Дополним таблицу для определения, какая из линий лучше (в смысле наименьших квадратов), выравнивает экспериментальные данные, обозначив значения, полученные по формуле

$$y = 0,02x + 0,46: \quad y^*; \quad y = (x - 5)^2: \quad \tilde{y}.$$

Т.к.

$$\min\{0,331; 0,175\} = 0,175;$$

то делаем вывод, что парабола лучше выравнивает экспериментальные данные.



7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}}.$$

**Решение.**

$$c_n = \frac{1}{3^n \sqrt{n+1}}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1} \sqrt{n+2}}.$$

Найдем радиус сходимости степенного ряда:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+1}} : \frac{1}{3^{n+1} \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \sqrt{n+2}}{3^n \sqrt{n+1}} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}} = 3 \cdot \sqrt{1} = 3; \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится для значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $-3 < x < 3$ .

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если  $x = 3$ , то получаем

$$\text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/2}} : \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ , то по предельному признаку сравнения из расходимости обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \left( \alpha = \frac{1}{2} < 1 \right) \text{ следует расходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\text{Если } x = -3, \text{ то получаем ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

По признаку Лейбница:

$$1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0, \text{ значит, оба условия признака Лейбница выполняются,}$$

исходный ряд сходится.

Итак, область сходимости степенного ряда определяется двойным неравенством  $-3 \leq x < 3$ .



