

**Соглашение об использовании**

Материалы данного файла могут быть использованы без ограничений для написания собственных работ с целью последующей сдачи в учебных заведениях.

Во всех остальных случаях полное или частичное воспроизведение, размножение или распространение материалов данного файла допускается только с письменного разрешения администрации проекта <http://www.vzfeiinfo.ru/>.

## Вариант 5

### Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} dx.$$

**Решение.**

Для вычисления этого интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} dx &= \int x^{-1/5} \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^{-1/5} dx \quad v = \frac{5}{4} \cdot x^{4/5} \end{array} \right| = \frac{5}{4} \cdot x^{4/5} \cdot \ln x - \int \left( \frac{5}{4} \cdot x^{4/5} \cdot \frac{dx}{x} \right) = \\ &= \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} \ln x - \frac{5}{4} \int x^{-1/5} dx = \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} \ln x - \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot x^{4/5} + C = \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} \ln x - \frac{25}{16} \sqrt[5]{x^4} + C; \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} \ln x - \frac{25}{16} \sqrt[5]{x^4} + C.$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x + 8}}.$$

**Решение.**

Вычислим интеграл, используя метод замены переменной:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x + 8}} &= \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ t_1 = \ln 1 = 0 \\ t_2 = \ln e = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 8}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 8} \right| \Big|_0^1 = \\ &= \ln \left| 1 + \sqrt{1^2 + 8} \right| - \ln \left| 0 + \sqrt{0^2 + 8} \right| = \ln \left| \frac{4}{2\sqrt{2}} \right| = \ln \sqrt{2} \approx 0,35; \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\ln \sqrt{2} \approx 0,35.$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{4x^5 + 2}.$$

**Решение.**

Воспользуемся методом замены переменной:

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{4x^5 + 2} = \left. \begin{array}{l} 4x^5 + 2 = t \\ 20x^4 dx = dt \\ x^4 dx = \frac{dt}{20} \\ t_1 = 4 \cdot 0^5 + 2 = 2 \\ t_2 = 4 \cdot 1^5 + 2 = 6 \end{array} \right| = \int_2^6 \frac{dt}{20t} = \frac{1}{20} \int_2^6 \frac{dt}{t} = \frac{1}{20} \cdot \ln|t| \Big|_2^6 = \frac{1}{20} (\ln 6 - \ln 2) =$$
$$= \frac{1}{20} \ln \frac{6}{2} = \frac{\ln 3}{20} \approx 0,055.$$

**Ответ:**  $\frac{\ln 3}{20} \approx 0,055$ .

4. Решить дифференциальное уравнение:

$$5y' + 10y = e^{-x}.$$

**Решение.**

$$5y' + 10y = e^{-x};$$

$$y' + 2y = \frac{1}{5}e^{-x};$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{5}e^{-x};$$

Это линейное уравнение первого порядка.

Пусть  $y = uv$ , тогда  $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ .

Подставляя выражение  $\frac{dy}{dx}$  в исходное уравнение, будем иметь:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + 2uv = \frac{1}{5} e^{-x};$$

$$u \left( \frac{dv}{dx} + 2v \right) + v \frac{du}{dx} = \frac{1}{5} e^{-x}; \quad (1)$$

Для определения  $v$  получим уравнение

$$\frac{dv}{dx} + 2v = 0;$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{dv}{dx} = -2v;$$

$$\frac{dv}{v} = -2dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int dx;$$

Получили

$\ln v = -2x$  (постоянную интегрирования не вводим, так как достаточно найти какое-либо частное решение этого вспомогательного уравнения).

$$v = e^{-2x};$$

Подставляя выражение функции  $v$  в уравнение (1), получаем для определения  $u$  уравнение

$$e^{-2x} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{5} e^{-x}$$

$$\text{или} \quad du = \frac{1}{5} e^x dx,$$

$$\int du = \frac{1}{5} \int e^x dx,$$

$$\text{откуда} \quad u = \frac{1}{5} e^x + C;$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения будет иметь вид

$$y = uv = \left( \frac{1}{5}e^x + C \right) e^{-2x} = \frac{1}{5}e^{-x} + Ce^{-2x}.$$

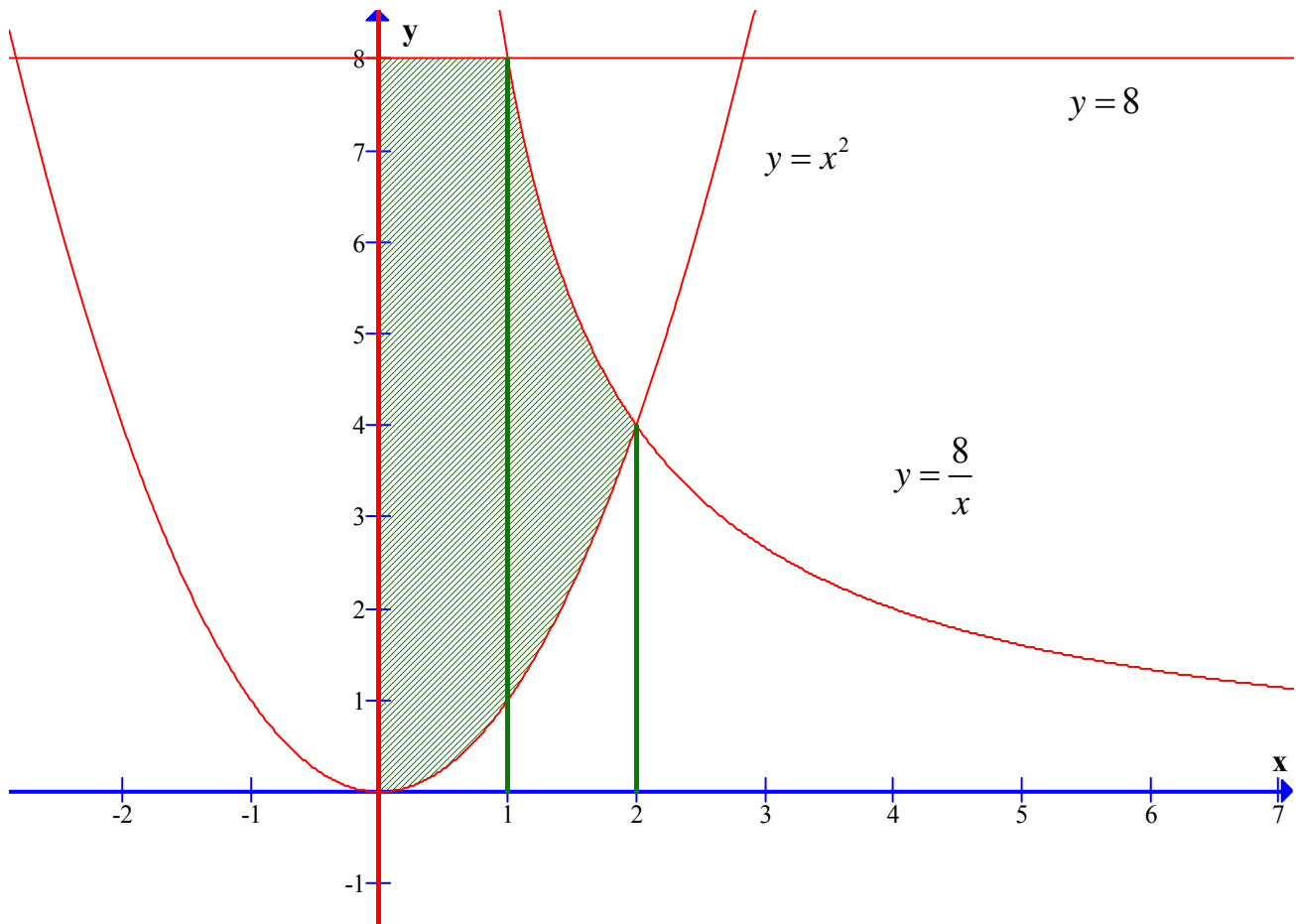
**Ответ:**  $y = \frac{1}{5}e^{-x} + Ce^{-2x}.$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, \quad y = \frac{8}{x}, \quad y = 8, \quad x = 0.$$

**Решение.**

Построим графики функций и найдем пределы интегрирования:



Пределы интегрирования:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{8}{x}, \\ \frac{8}{x} = 8, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 8 = 0, \\ 8 - 8x = 0, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$S = \int_0^1 (8 - x^2) dx + \int_1^2 \left( \frac{8}{x} - x^2 \right) dx = \left( 8x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left( 8 \ln|x| - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \left( 8 - \frac{1}{3} \right) + \left( 8 \ln 2 - \frac{8}{3} - 8 \ln 1 + \frac{1}{3} \right) = 8 - \frac{1}{3} + 8 \ln 2 - \frac{8}{3} - 0 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} + 8 \ln 2 \approx 10,9.$$

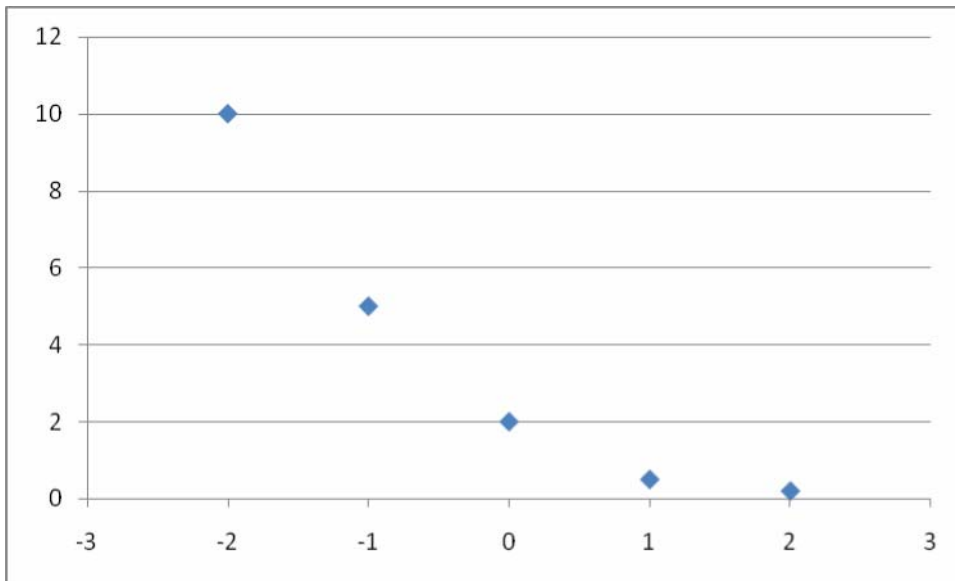
**Ответ:**  $\frac{16}{3} + 8 \ln 2 \approx 10,9$ .

6. Экспериментальные данные о значениях переменных  $x$  и  $y$  приведены в таблице:

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$y_i$	10	5	2	0,5	0,2

В результате их выравнивания получена функция  $y = 3^{-x}$ . Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью  $y = ax + b$  (найти параметры  $a$  и  $b$ ). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

**Решение.**



Для определения коэффициентов линейной зависимости используют формулы:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Построим и заполним вспомогательную таблицу:

$n$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$y_i^*$	$\tilde{y}_i$	$(y_i^* - y_i)^2$	$(\tilde{y}_i - y_i)^2$
1	-2	10	4	-20	8,3	9,00	2,89	1,00
2	-1	5	1	-5	5,9	3,00	0,81	4,00
3	0	2	0	0	3,5	1,00	2,25	1,00
4	1	0,5	1	0,5	1,1	0,33	0,36	0,03
5	2	0,2	4	0,4	-1,3	0,11	2,25	0,01
$\Sigma$	0	17,7	10	-24,1	17,5	13,44	8,56	6,04

Используя полученные значения, имеем:

$$\begin{cases} 10a + 0 \cdot b = -24,1, \\ 0 \cdot a + 5b = 17,7. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$a = -2,4; \quad b = 3,5.$$

Т.е.

$$y = -2,4x + 3,5.$$

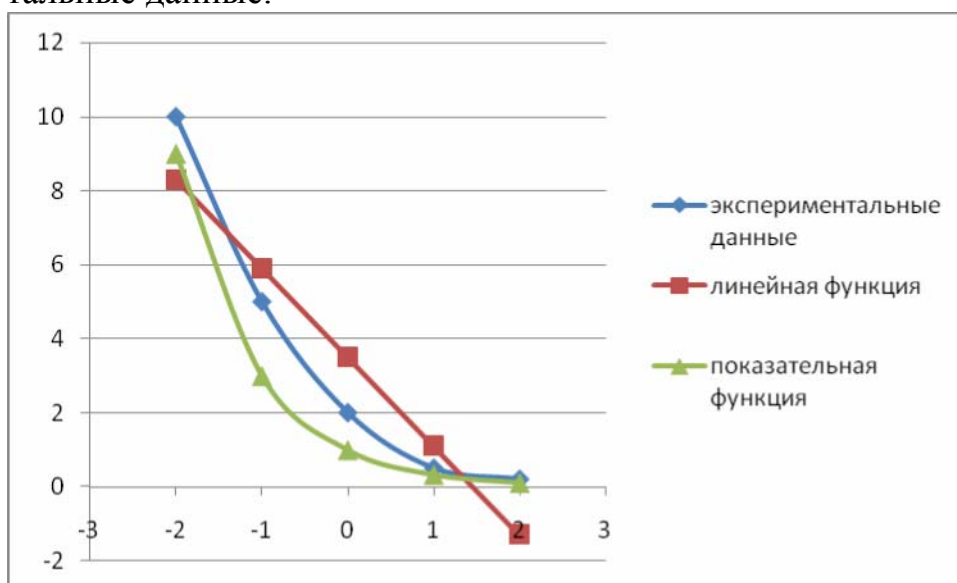
Дополним таблицу для определения, какая из линий лучше (в смысле наименьших квадратов), выравнивает экспериментальные данные, обозначив значения, полученные по формуле

$$y = y = -2,4x + 3,5 : y^*; \quad y = 3^{-x} : \tilde{y}.$$

Т.к.

$$\min \{8,56; 6,04\} = 6,04;$$

то делаем вывод, что показательная функция лучше выравнивает экспериментальные данные.



7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (3n+2)}{(2n+1)}.$$

**Решение.**

$$c_n = \frac{3n+2}{2n+1}, \quad c_{n+1} = \frac{3n+5}{2n+3}.$$

Найдем радиус сходимости степенного ряда:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+1} \cdot \frac{3n+5}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(2n+3)}{(2n+1)(3n+5)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{n}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1; \end{aligned}$$



Следовательно, ряд сходится для значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $-1 < x < 1$ .

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если  $x = 1$ , то получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n+2)}{(2n+1)}.$$

По признаку Лейбница:

$$1) \frac{5}{3} > \frac{8}{5} > \frac{11}{7} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \neq 0;$$

второе условие признака Лейбница не выполняется, исходный ряд расходится.

Если  $x = -1$ , то получаем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n+1}$ .

$$\text{Т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \neq 0, \text{ то не выполняется необходимый признак сходимости, значит, ряд расходится.}$$

Итак, область сходимости степенного ряда определяется двойным неравенством  $-1 < x < 1$ .