

Соглашение об использовании

Материалы данного файла могут быть использованы без ограничений для написания собственных работ с целью последующей сдачи в учебных заведениях.

Во всех остальных случаях полное или частичное воспроизведение, размножение или распространение материалов данного файла допускается только с письменного разрешения администрации проекта <http://www.vzfeiinfo.ru/>.

Вариант 10

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4} dx.$$

Решение.

Для вычисления этого интеграла воспользуемся методом замены переменной:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4} dx = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 - 5t + 4} = \int \frac{1}{(t-1)(t-4)} dt;$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов для разложения подынтегральной функции на простейшие дроби I типа.

$$\frac{1}{(t-1)(t-4)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-4};$$

$$1 = A(t-4) + B(t-1);$$

$$t = 4; \quad 1 = 3B; \quad B = 1/3;$$

$$t = 1; \quad 1 = -3A; \quad A = -1/3;$$

$$\frac{1}{(t-1)(t-4)} = \frac{-1/3}{t-1} + \frac{1/3}{t-4};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t-1)(t-4)} dt &= -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t-4} = -\frac{1}{3} \ln|t-1| + \frac{1}{3} \ln|t-4| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-4}{t-1} \right| + C = \\ &= \ln \sqrt[3]{\frac{t-4}{t-1}} + C. \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4} dx = \ln \sqrt[3]{\frac{e^x - 4}{e^x - 1}} + C.$$

Ответ: $\ln \sqrt[3]{\frac{e^x - 4}{e^x - 1}} + C.$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x(5-\sqrt{x})}}.$$

Решение.

Вычислим интеграл, используя метод замены переменной:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(5-\sqrt{x})} = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{5-\sqrt{x}}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \\ t_1 = \sqrt{1} = 1 \\ t_2 = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{2dt}{\sqrt{5-t}} = 2 \int_1^2 (5-t)^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= -2 \cdot \frac{(5-t)^{\frac{1}{2}}}{1/2} \Big|_1^2 = -4\sqrt{5-t} \Big|_1^2 = -4(\sqrt{3} - \sqrt{4}) = 4(2 - \sqrt{3}) \approx 1,07;$$

Ответ: $4(2 - \sqrt{3}) \approx 1,07$.

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 e^{2x} \cdot x^2 dx.$$

Решение.

Выполним интегрирование по частям:

$$\int_0^1 e^{2x} x^2 dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = e^{2x} dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} e^{2x} x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} e^{2x} x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u_1 = x \quad du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x} dx \quad v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} e^{2x} x^2 \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{2} e^{2x} x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} x^2 \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{2} e^{2x} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2} e^{2x} x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} e^{2x} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (e^2 - 1) \approx 3,1.$$

Ответ: $\frac{1}{2} (e^2 - 1) \approx 3,1$.

4. Решить дифференциальное уравнение:

$$x \ln x (y^2 + 4) dx - 5y dy = 0.$$

Решение.

$$x \ln x (y^2 + 4) dx - 5y dy = 0;$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$x \ln x dx - \frac{5y dy}{y^2 + 4} = 0;$$

$$\int x \ln x dx - \int \frac{5y dy}{y^2 + 4} = 0;$$

Вычислим первый интеграл отдельно, используя метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C; \end{aligned}$$

Вычислим второй интеграл, используя метод замены переменной:

$$\frac{5y dy}{y^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} y^2 + 4 = t \\ 2y dy = dt \\ y dy = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{5}{2} \ln |t| + C = \frac{5}{2} \ln (y^2 + 4) + C;$$

Итак,

$$\int x \ln x dx - \int \frac{5y dy}{y^2 + 4} = 0;$$

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} \ln (y^2 + 4) = C \text{ - общий интеграл уравнения.}$$

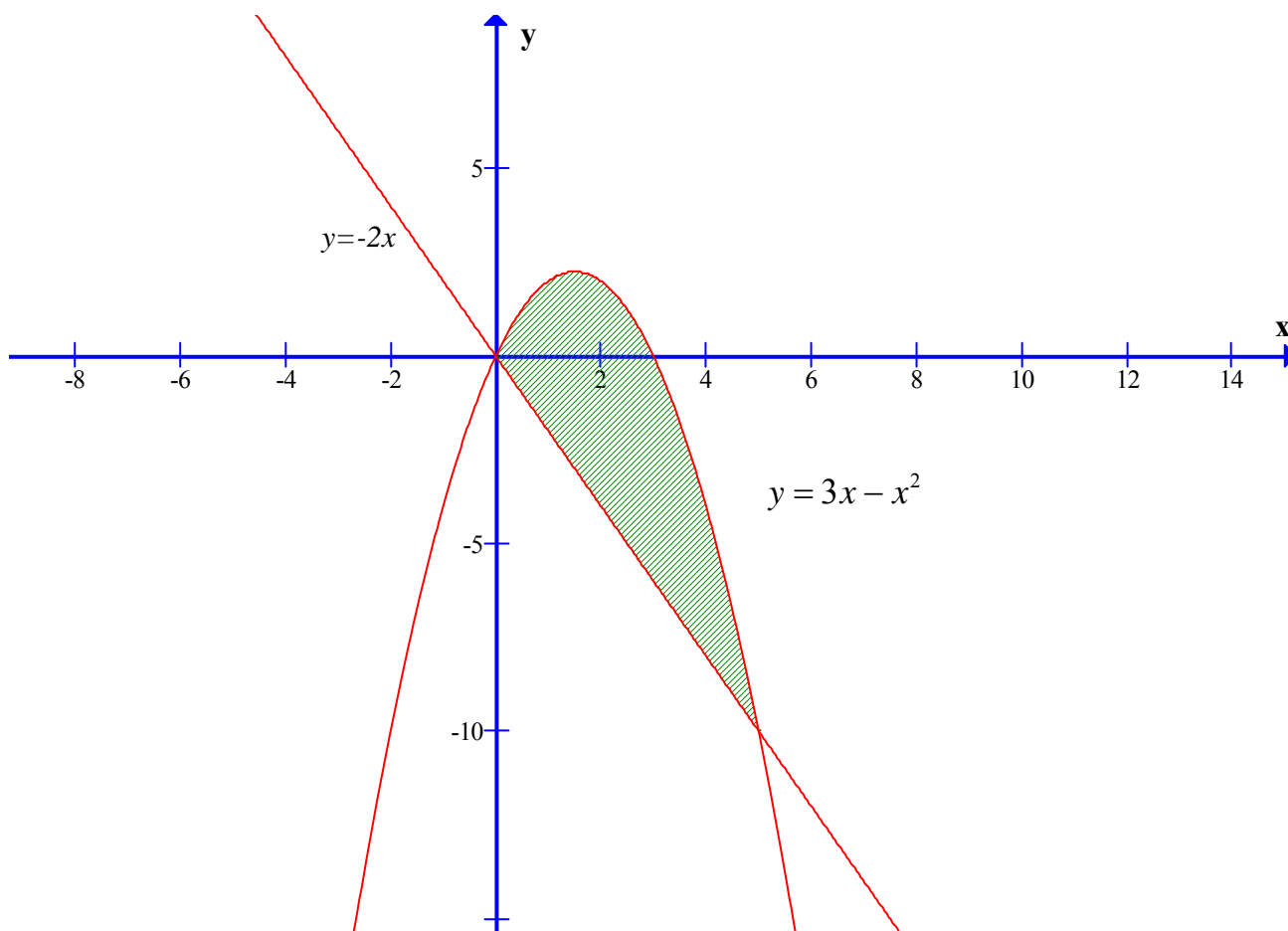
$$\text{Ответ: } \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} \ln (y^2 + 4) = C.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -2x, \quad y = 3x - x^2.$$

Решение.

Построим графики функций и найдем пределы интегрирования:



Пределы интегрирования:

$$-2x = 3x - x^2;$$

$$x^2 - 5x = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 5. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 (3x - x^2 - (-2x)) dx = \int_0^5 (5x - x^2) dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = 125 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

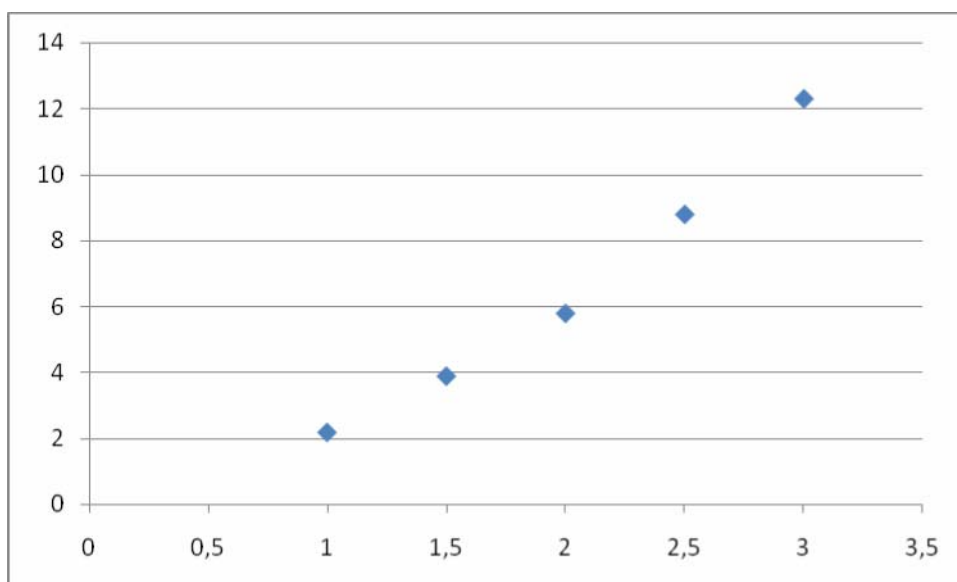
Ответ: $\frac{125}{6}$.

6. Экспериментальные данные о значениях переменных x и y приведены в таблице:

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	2,2	3,9	5,8	8,8	12,3

В результате их выравнивания получена функция $y = x^2 + x$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

Решение.



Для определения коэффициентов линейной зависимости используют формулы:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Построим и заполним вспомогательную таблицу:

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^*	\tilde{y}_i	$(y_i^* - y_i)^2$	$(\tilde{y}_i - y_i)^2$
1	1	2,2	1	2,2	1,58	2,00	0,38	0,04
2	1,5	3,9	2,25	5,85	4,09	3,75	0,04	0,02
3	2	5,8	4	11,6	6,6	6,00	0,64	0,04
4	2,5	8,8	6,25	22	9,11	8,75	0,10	0,00
5	3	12,3	9	36,9	11,62	12,00	0,46	0,09
Σ	10	33	22,5	78,55	33	32,50	1,62	0,20

Используя полученные значения, имеем:

$$\begin{cases} 22,5a + 10b = 78,55 \\ 10a + 5b = 33. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$a = 5,02; \quad b = -3,44.$$

Т.е.

$$y = 5,02x - 3,44.$$

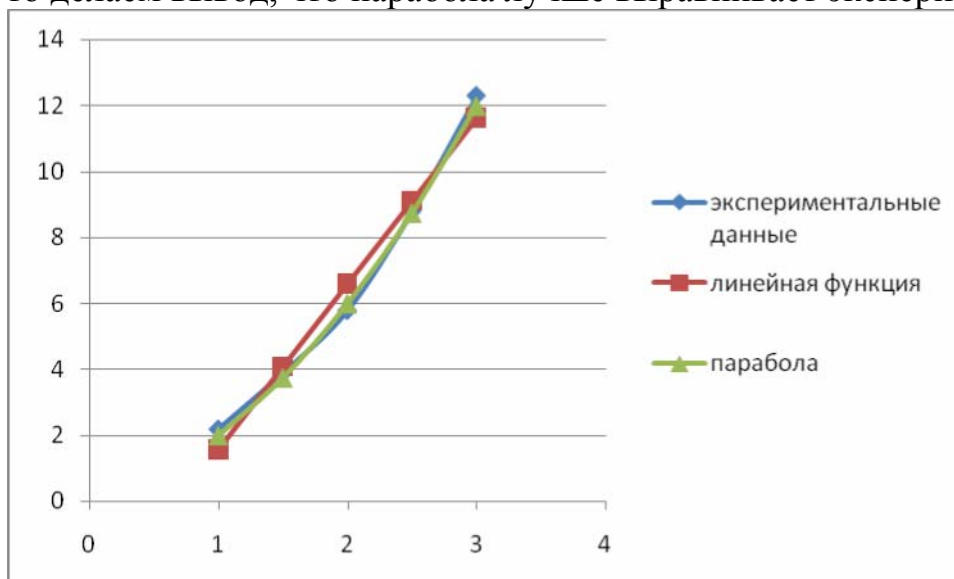
Дополним таблицу для определения, какая из линий лучше (в смысле наименьших квадратов), выравнивает экспериментальные данные, обозначив значения, полученные по формуле

$$y = 5,02x - 3,44 : y^*; \quad y = x^2 + x : \tilde{y}.$$

Т.к.

$$\min \{1,62; 0,20\} = 0,20;$$

то делаем вывод, что парабола лучше выравнивает экспериментальные данные.



7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}.$$

Решение.

$$c_n = \frac{5^n}{n!}, \quad c_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Найдем радиус сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} : \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n (n+1)!}{5^{n+1} n!} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty;$$

Область сходимости степенного ряда $(-\infty; +\infty)$.