

Соглашение об использовании

Материалы данного файла могут быть использованы без ограничений для написания собственных работ с целью последующей сдачи в учебных заведениях.

Во всех остальных случаях полное или частичное воспроизведение, размножение или распространение материалов данного файла допускается только с письменного разрешения администрации проекта <http://www.vzfeiinfo.ru/>.

Вариант 6

Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 7x - 8}}.$$

Решение.

Для вычисления этого интеграла воспользуемся методом замены переменной:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 7x - 8}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x + \frac{49}{4} - \frac{81}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}}} = \left| x + \frac{7}{2} = t \right|_{dx=dt} = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{81}{4}}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{81}{4}} \right| + C = \ln \left| x + \frac{7}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{2x+7}{2} + \sqrt{x^2 + 7x - 8} \right| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\ln \left| \frac{2x+7}{2} + \sqrt{x^2 + 7x - 8} \right| + C.$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x^2}.$$

Решение.

Вычислим интеграл, используя метод замены переменной:

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x^2} = \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{x} = t \\ \frac{dx}{x^2} = dt \\ t_1 = -\frac{1}{1} = -1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} = -0,5 \end{array} \right| = \int_{-1}^{-0,5} e^t dt = e^t \Big|_{-1}^{-0,5} = e^{-0,5} - e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{e} - 1}{e} \approx 0,24.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{e} - 1}{e} \approx 0,24.$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \ln x \cdot x^3 dx.$$

Решение.

Воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \cdot x^3 dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_1^e = \frac{e^4}{4} \cdot \ln e - \frac{1}{4} \cdot \ln 1 - \left(\frac{e^4}{16} - \frac{1}{16} \right) = \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16} \approx 10. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3e^4 + 1}{16} \approx 10.$

4. Решить дифференциальное уравнение:

$$y\sqrt{x^2 + 4}dy - x\sqrt{y^2 - 8}dx = 0.$$

Решение.

$$y\sqrt{x^2 + 4}dy - x\sqrt{y^2 - 8}dx = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 8}} - \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0;$$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 8}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0;$$

Вычислим первый интеграл отдельно, используя метод замены переменной:

$$\begin{aligned} \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 8}} &= \left| \begin{array}{l} y^2 - 8 = t \\ 2ydy = dt \\ ydy = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = t^{1/2} + C = \sqrt{t} + C = \\ &= \sqrt{y^2 - 8} + C; \end{aligned}$$

Вычислим второй интеграл также, используя метод замены переменной:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} x^2+4=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = t^{1/2} + C = \sqrt{t} + C =$$

$$= \sqrt{x^2+4} + C;$$

Итак,

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-8}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = 0;$$

$$\sqrt{y^2-8} - \sqrt{x^2+4} = C - \text{общий интеграл уравнения.}$$

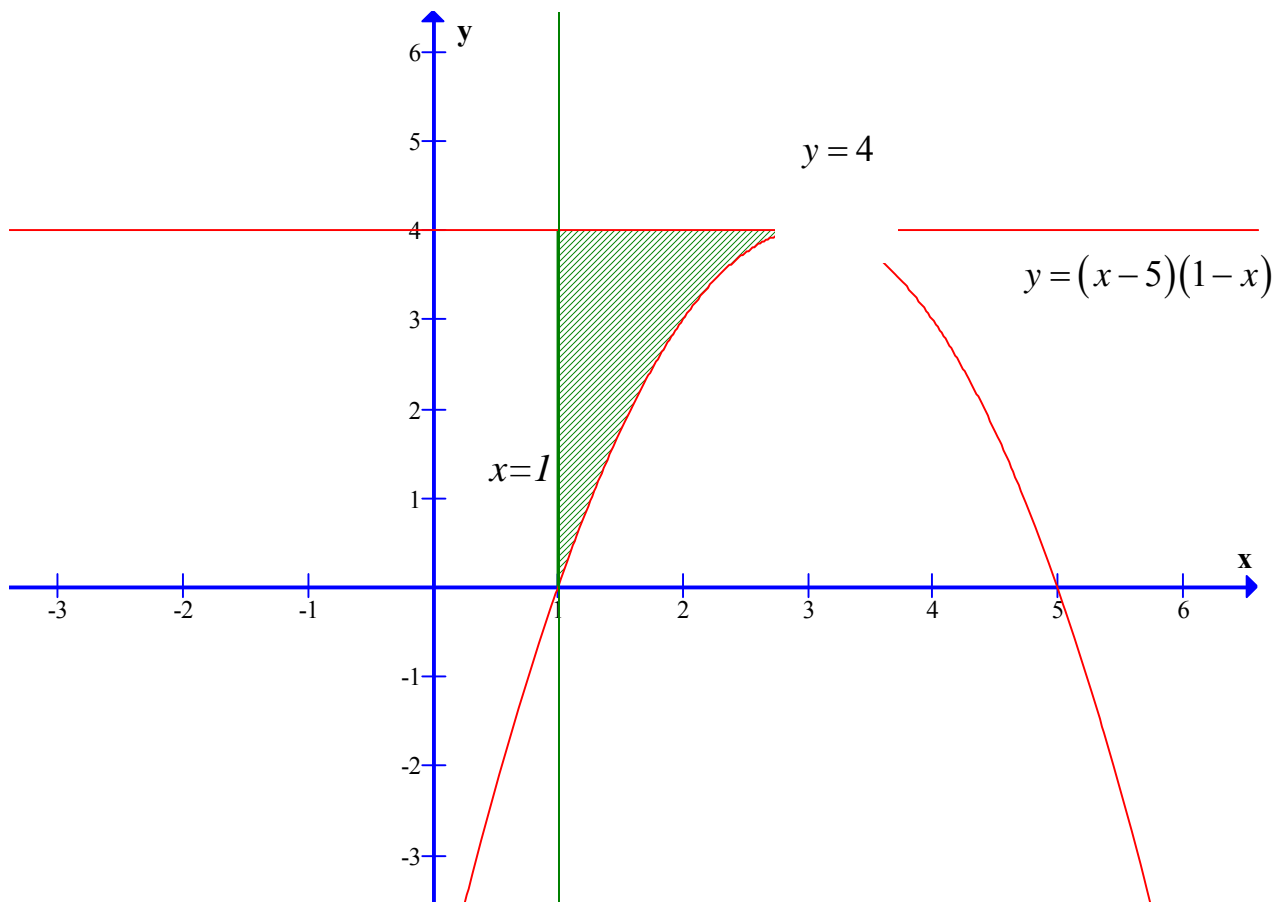
Ответ: $\sqrt{y^2-8} - \sqrt{x^2+4} = C.$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = (x-5)(1-x), \quad y = 4, \quad x = 1.$$

Решение.

Построим графики функций и найдем пределы интегрирования:



Пределы интегрирования:

$$4 = (x - 5)(1 - x)$$

$$4 = -x^2 + 6x - 5;$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0;$$

$$(x - 3)^2 = 0;$$

$$x = 3$$

$$S = \int_1^3 (4 - (x - 5)(1 - x)) dx = \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{6 \cdot x^2}{2} + 9x \right) \Big|_1^3 =$$

$$= (9 - 27 + 27) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 9 \right) = \frac{8}{3}.$$

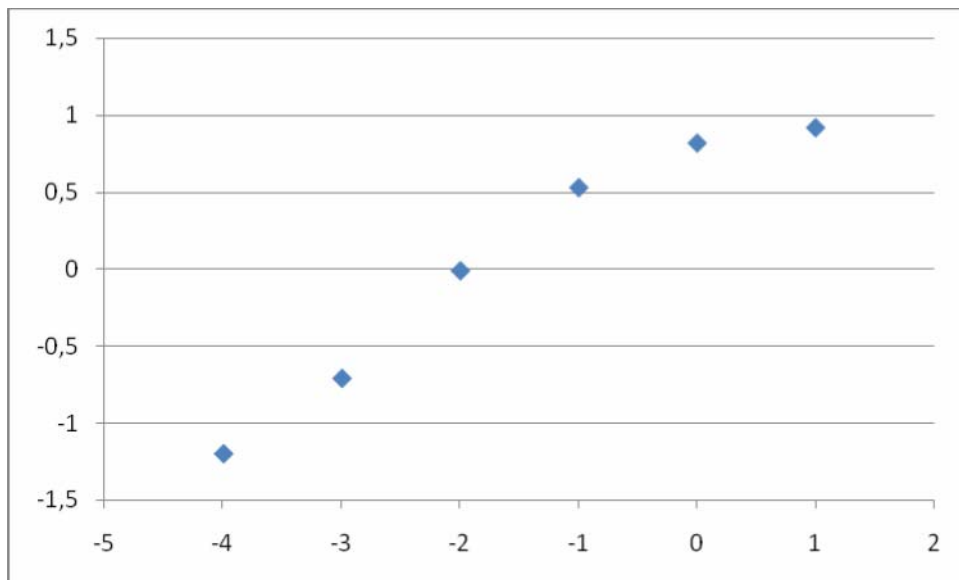
Ответ: $\frac{8}{3}$.

6. Экспериментальные данные о значениях переменных x и y приведены в таблице:

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1
y_i	-1,2	-0,71	-0,01	0,53	0,82	0,92

В результате их выравнивания получена функция $y = \frac{2x-1}{3x+1}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

Решение.



Для определения коэффициентов линейной зависимости используют формулы:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Построим и заполним вспомогательную таблицу:

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^*	\tilde{y}_i	$(y_i^* - y_i)^2$	$(\tilde{y}_i - y_i)^2$
1	-4	-1,2	16	4,8	-0,9	0,82	0,09	4,07
2	-3	-0,71	9	2,13	-0,5	0,88	0,04	2,51
3	-2	0,01	4	0,02	-0,1	1,00	0,01	1,02
4	-1	0,53	1	-0,53	0,3	1,50	0,05	0,94
5	0	0,82	0	0	0,7	-1,00	0,01	3,31
6	1	0,92	1	0,92	1,1	0,25	0,03	0,45
Σ	-9	0,35	31	7,34	0,6	3,44	0,24	12,31

Используя полученные значения, имеем:

$$\begin{cases} 31a - 9b = 7,34, \\ -9a + 6b = 0,35. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$a = 0,45; \quad b = 0,73.$$

Т.е.

$$y = 0,45x + 0,73.$$

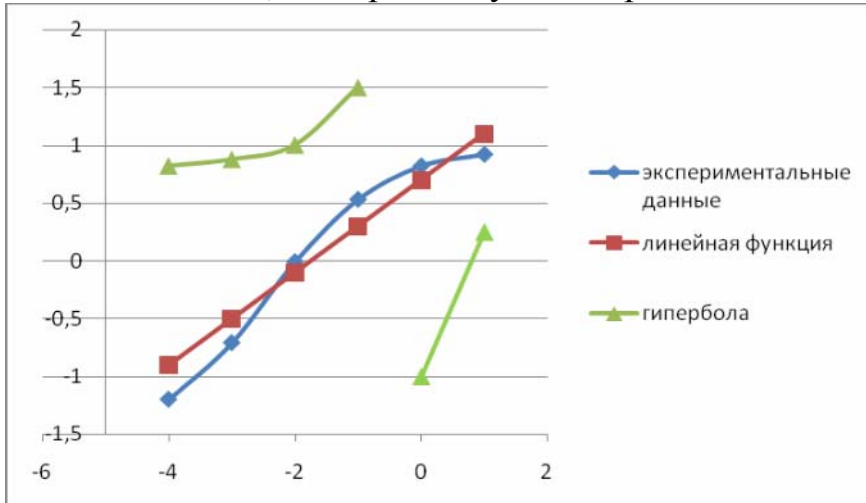
Дополним таблицу для определения, какая из линий лучше (в смысле наименьших квадратов), выравнивает экспериментальные данные, обозначив значения, полученные по формуле

$$y = 0,45x + 0,73 : y^*; \quad y = \frac{2x-1}{3x+1} : \tilde{y}.$$

Т.к.

$$\min\{0,24; 13,31\} = 0,24,$$

то делаем вывод, что прямая лучше выравнивает экспериментальные данные.



7. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{3^n}.$$

В случае сходимости ряда установить ее характер (абсолютная или условная).

Решение.

По признаку Лейбница:

$$1) \frac{7}{3} > \frac{9}{9} > \frac{11}{27} > \dots$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3^n} = 0$, значит, оба условия признака Лейбница выполняются, ряд сходится.

Установим характер сходимости.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n+5}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}.$$

$$\text{Т.к. } D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+7}{3^{n+1}} : \frac{2n+5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+7)3^n}{3^{n+1}(2n+5)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{7}{n} \right)}{n \left(2 + \frac{5}{n} \right)} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{7}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}$ сходится

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{3^n}$ сходится абсолютно.