

**Соглашение об использовании**

Материалы данного файла могут быть использованы без ограничений для написания собственных работ с целью последующей сдачи в учебных заведениях.

Во всех остальных случаях полное или частичное воспроизведение, размножение или распространение материалов данного файла допускается только с письменного разрешения администрации проекта <http://www.vzfeiinfo.ru/>.

## Вариант 9

### Контрольная работа № 2

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int e^{-5x+1} (2x+3) dx.$$

**Решение.**

Для вычисления этого интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int e^{-5x+1} (2x+3) dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x+3 \quad du = 2dx \\ dv = e^{-5x+1} dx \quad v = -\frac{1}{5} e^{-5x+1} \end{array} \right| = (2x+3) \cdot \left( -\frac{1}{5} e^{-5x+1} \right) - \\ &- \int \left( -\frac{1}{5} e^{-5x+1} \right) \cdot 2dx = -\frac{1}{5} (2x+3) e^{-5x+1} + \frac{2}{5} \int e^{-5x+1} dx = -\frac{1}{5} (2x+3) e^{-5x+1} + \\ &+ \frac{2}{5} \cdot \left( -\frac{1}{5} e^{-5x+1} \right) + C = -\frac{1}{5} (2x+3) e^{-5x+1} - \frac{2}{25} e^{-5x+1} + C; \end{aligned}$$

**Ответ:**  $-\frac{1}{5} (2x+3) e^{-5x+1} - \frac{2}{25} e^{-5x+1} + C.$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^9 \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

**Решение.**

Вычислим интеграл, используя метод замены переменной:

$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \\ t_1 = \sqrt{1} = 1 \\ t_2 = \sqrt{9} = 3 \end{array} \right| = \int_1^3 4^t \cdot 2dt = 2 \int_1^3 4^t dt = 2 \cdot \left. \frac{4^t}{\ln 4} \right|_1^3 = \frac{2}{2 \ln 2} (4^3 - 4^1) = \frac{1}{\ln 2} (64 - 4) = \\ &= \frac{60}{\ln 2} \approx 86,6; \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{60}{\ln 2} \approx 86,6$ .

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_4^5 \frac{2x-1}{x^2-2x-3} dx.$$

**Решение.**

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов для разложения подынтегральной функции на простейшие дроби I типа.

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3} = \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1};$$

Приведем в правой части дроби к общему знаменателю и освободимся от знаменателя.

$$2x-1 = A(x+1) + B(x-3);$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$2x-1 = (A+B)x + A-3B;$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A-3B=-1 \end{cases}, \text{ из которой найдем коэффициенты } A = \frac{5}{4}, \quad B = \frac{3}{4}.$$

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3} = \frac{5/4}{x-3} + \frac{3/4}{x+1};$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_4^5 \frac{2x-1}{x^2-2x-3} dx &= \int_4^5 \left( \frac{5/4}{x-3} + \frac{3/4}{x+1} \right) dx = \left( \frac{5}{4} \ln|x-3| + \frac{3}{4} \ln|x+1| \right) \Big|_4^5 = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| (x-3)^5 (x+1)^3 \right| \Big|_4^5 = \frac{1}{4} (\ln|32 \cdot 216| - \ln|1 \cdot 125|) = \frac{1}{4} \ln \frac{6912}{125} \approx 1. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{4} \ln \frac{6912}{125} \approx 1$ .

4. Решить дифференциальное уравнение:

$$7xy' - \sqrt{xy} = 7y.$$

**Решение.**

$$7xy' - \sqrt{xy} = 7y;$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{y}{x}};$$

Это однородное уравнение первого порядка.

Пусть  $z = \frac{y}{x}$ ;  $y = xz$ ;  $y' = z + xz'$ ; тогда:

$$z + xz' = \frac{xz}{x} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{xz}{x}};$$

$$z + xz' = z + \frac{1}{7}\sqrt{z};$$

$$x \frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{7}\sqrt{z} - z;$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x};$$

$$2\sqrt{z} = \frac{1}{7} \ln x + C \quad \text{или} \quad 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{7} \ln x + C \quad - \text{общий интеграл исходного уравнения.}$$

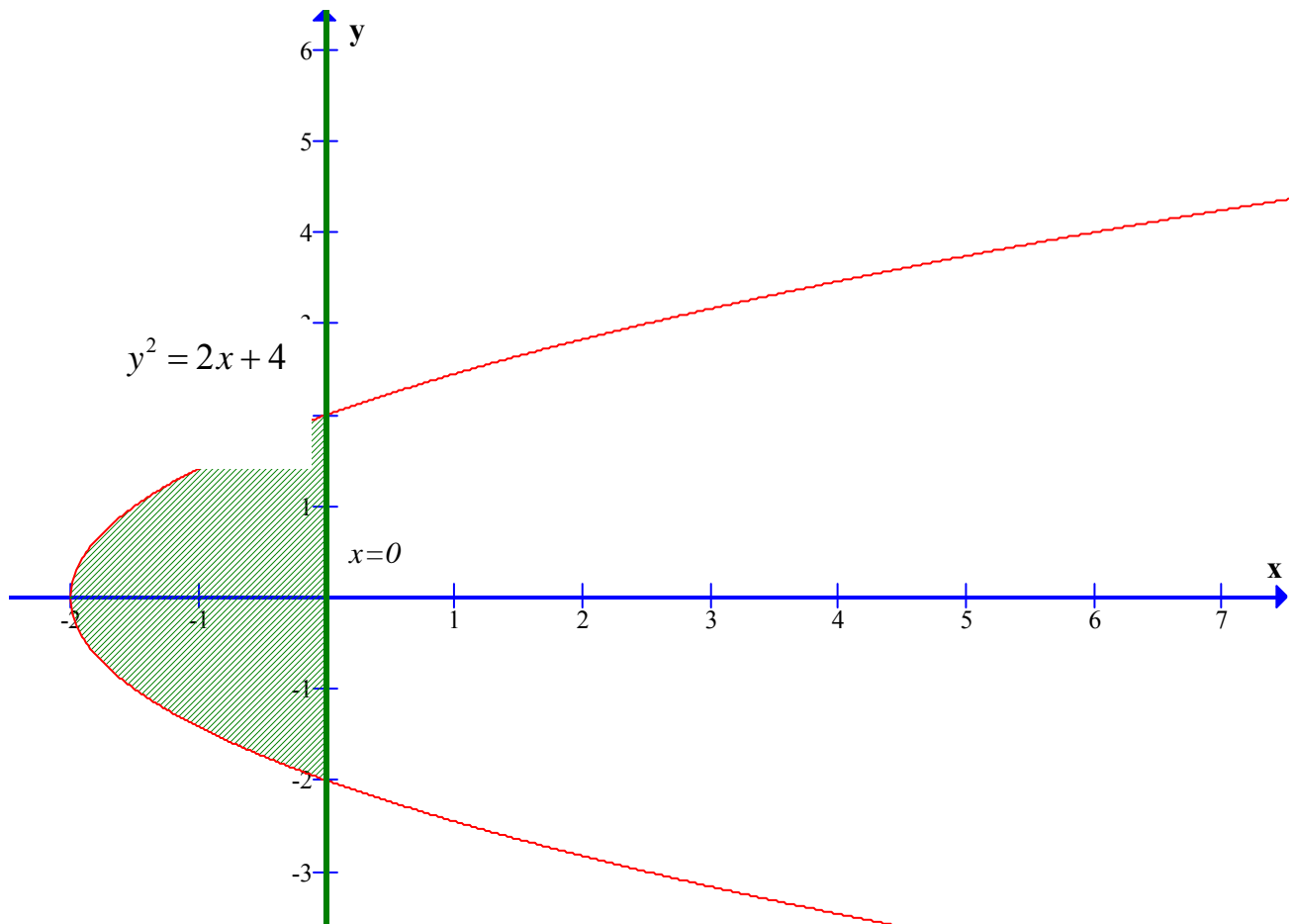
**Ответ:**  $2\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{7} \ln x + C$ .

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 2x + 4, \quad x = 0.$$

**Решение.**

Построим графики функций и найдем пределы интегрирования:



Пределы интегрирования:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \sqrt{2x+4} dx - \int_{-2}^0 (-\sqrt{2x+4}) dx = 2 \int_{-2}^0 \sqrt{2x+4} dx = 2 \int_{-2}^0 (2x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+4)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \bigg|_{-2}^0 = \frac{2}{3} \sqrt{(2x+4)^3} \bigg|_{-2}^0 = \frac{2}{3} (8-0) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

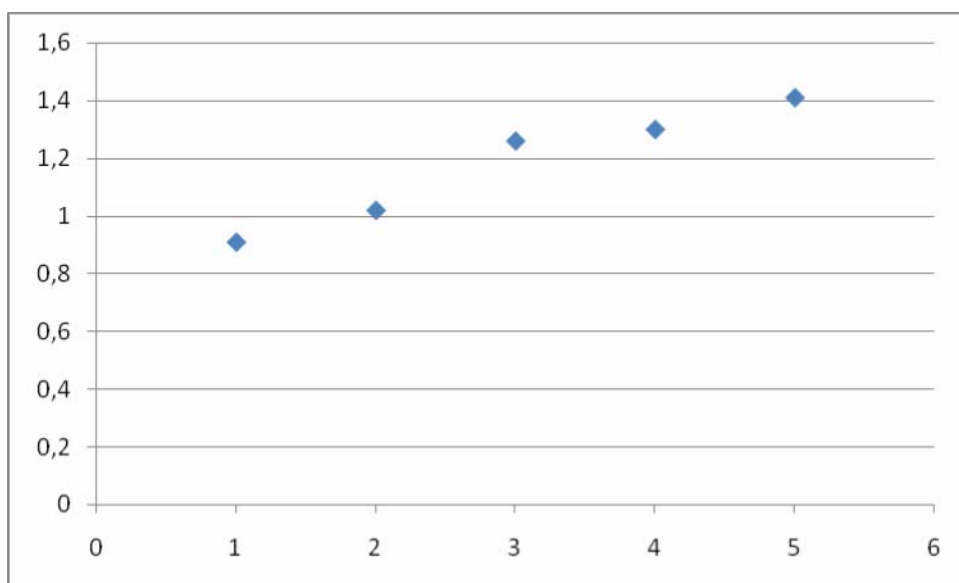
**Ответ:**  $\frac{16}{3}$ .

6. Экспериментальные данные о значениях переменных  $x$  и  $y$  приведены в таблице:

$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	0,96	1,02	1,26	1,30	1,41

В результате их выравнивания получена функция  $y = \sqrt[4]{x}$ . Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью  $y = ax + b$  (найти параметры  $a$  и  $b$ ). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

**Решение.**



Для определения коэффициентов линейной зависимости используют формулы:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Построим и заполним вспомогательную таблицу:

$n$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$y_i^*$	$\tilde{y}_i$	$(y_i^* - y_i)^2$	$(\tilde{y}_i - y_i)^2$
1	1	0,91	1	0,91	0,9	1,00	0,00	0,01
2	2	1,02	4	2,04	1	1,19	0,00	0,03
3	3	1,26	9	3,78	1,1	1,32	0,03	0,00

4	4	1,3	16	5,2	1,2	1,41	0,01	0,01
5	5	1,41	25	7,05	1,3	1,50	0,01	0,01
$\Sigma$	15	5,9	55	18,98	5,5	6,41	0,05	0,06

Используя полученные значения, имеем:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 18,98, \\ 15a + 5b = 5,9. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$a = 0,1; \quad b = 0,8.$$

Т.е.

$$y = 0,1x + 0,8.$$

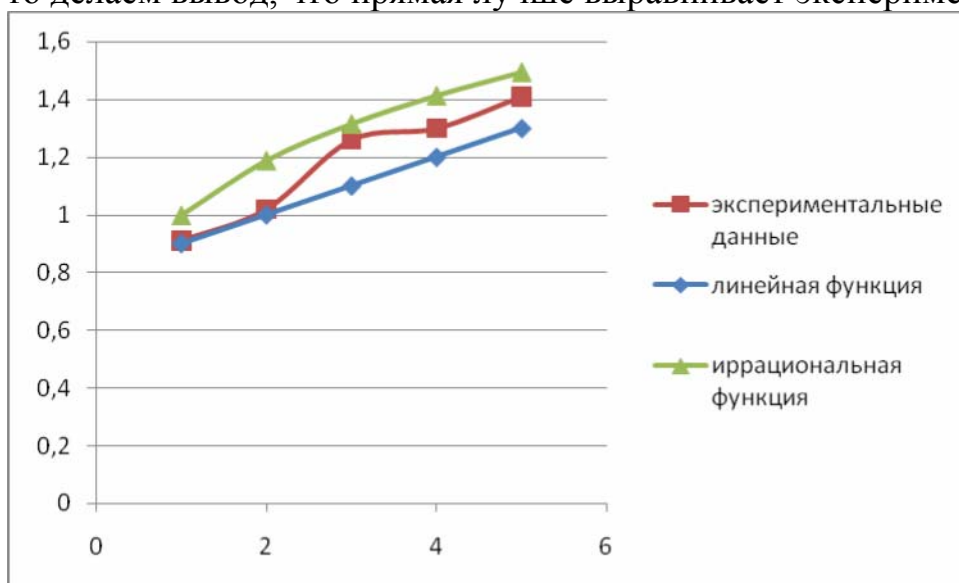
Дополним таблицу для определения, какая из линий лучше (в смысле наименьших квадратов), выравнивает экспериментальные данные, обозначив значения, полученные по формуле

$$y = 0,1x + 0,8: \quad y^*; \quad y = \sqrt[4]{x}: \quad \tilde{y}.$$

Т.к.

$$\min\{0,05; 0,06\} = 0,05;$$

то делаем вывод, что прямая лучше выравнивает экспериментальные данные.



7. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

**Решение.**

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{\frac{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3-2}{2n+3} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{2n+3} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{2}{2n+3} \right)^{\frac{2n+3}{-2}} \right]^{\frac{n}{2} \cdot \frac{-2}{2n+3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+3}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2+3/n}} = e^{-1/2} \neq 0, \end{aligned}$$

значит, не выполняется необходимый признак сходимости, следовательно, исходный ряд **расходится**.