

Вариант 1.

1. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 8}$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 8} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x-4} = \frac{12}{-2} = -6$$

2. Составить уравнения касательных к графику функции $y = \frac{1}{6}(x^2 + 9)(x - 6)$ в точках ее пересечения с осями координат. Сделать чертеж.

Решение.

Получим точки при $x = 0, y = -9$, и точку $x = 6, y = 0$.

Уравнение касательной в общем виде:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Найдем производную:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{6}(x^2 + 9)(x - 6) \right)' = \left(\frac{1}{6}(x^2 + 9) \right)' (x - 6) + \left(\frac{1}{6}(x^2 + 9) \right) (x - 6)' \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Тогда при $x = 0; y'(0) = \frac{3}{2}$, при $x = 6; y'(6) = \frac{6^2}{2} - 2 \cdot 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

Тогда уравнения касательных:

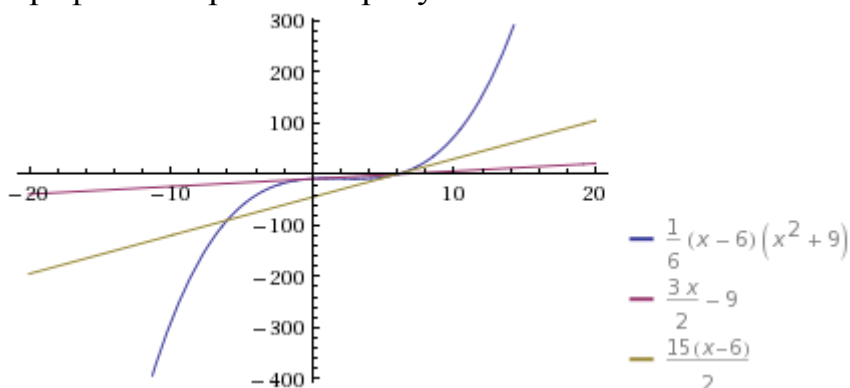
$$y = -9 + \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y = -9 + \frac{3}{2}x$$

$$y = 0 + \frac{15}{2}(x - 6)$$

$$y = \frac{15}{2}x - 45$$

График изображен на рисунке.



3. Исследовать функцию $y = x^2 e^{-2x+2}$ и схематично построить ее график.

Решение.

1) Область определения функции – вся числовая прямая, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$

Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y = x^2 e^{-2x+2} = 0 \Rightarrow \text{действительных точек } x_1 = 0;$$

$$Oy: x = 0 \Rightarrow y = 0$$

3) Функция ни чётная, ни нечётная. Симметрии относительно оси ординат нет. Симметрии относительно начала координат тоже нет. Так как

$$y(-x) = (-x)^2 e^{-2*(-x)+2} = x^2 e^{2x+2}$$

Видим, что

$$y(-x) \neq -y(x) \text{ и } y(-x) \neq y(x)$$

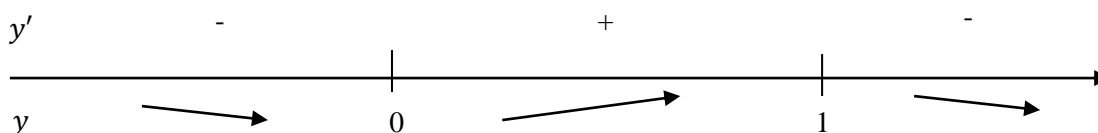
4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную

$$y' = (x^2 e^{-2x+2})' = (x^2)'(e^{-2x+2}) + (x^2)(e^{-2x+2})' = e^{-2x+2}(2x - 2x^2)$$

Находим критические точки, т.е. приравниваем производную к нулю:

$$y' = 0; e^{-2x+2}(2x - 2x^2) = 0; x_1 = 0; x_2 = 1$$

Исследуем знак производной на интервалах, на котором критические точки делят область определения функции.



Функция убывает на интервале $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ и возрастает на интервале $(0; 1)$. Функция имеет минимум в точке

$$x = 0$$

$$y(0) = 0$$

Функция имеет максимум в точке

$$x = 1$$

$$y(1) = 1$$

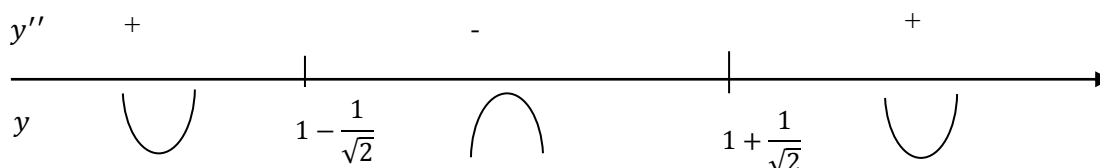
5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную

$$\begin{aligned} y'' &= (e^{-2x+2}(2x - 2x^2))' = (e^{-2x+2})'(2x - 2x^2) + (e^{-2x+2})(2x - 2x^2)' \\ &= 2e^{-2x+2}(2x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

Находим критические точки, т.е. приравниваем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0; 2e^{-2x+2}(2x^2 - 4x + 1) = 0; x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Исследуем знак производной на интервале, на которые критическая точка делит область определения функции:



Функция выпукла вверх на интервале $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, выпукла вниз на интервале $\left(-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$. Точка перегиба:

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$$

6) Асимптоты:

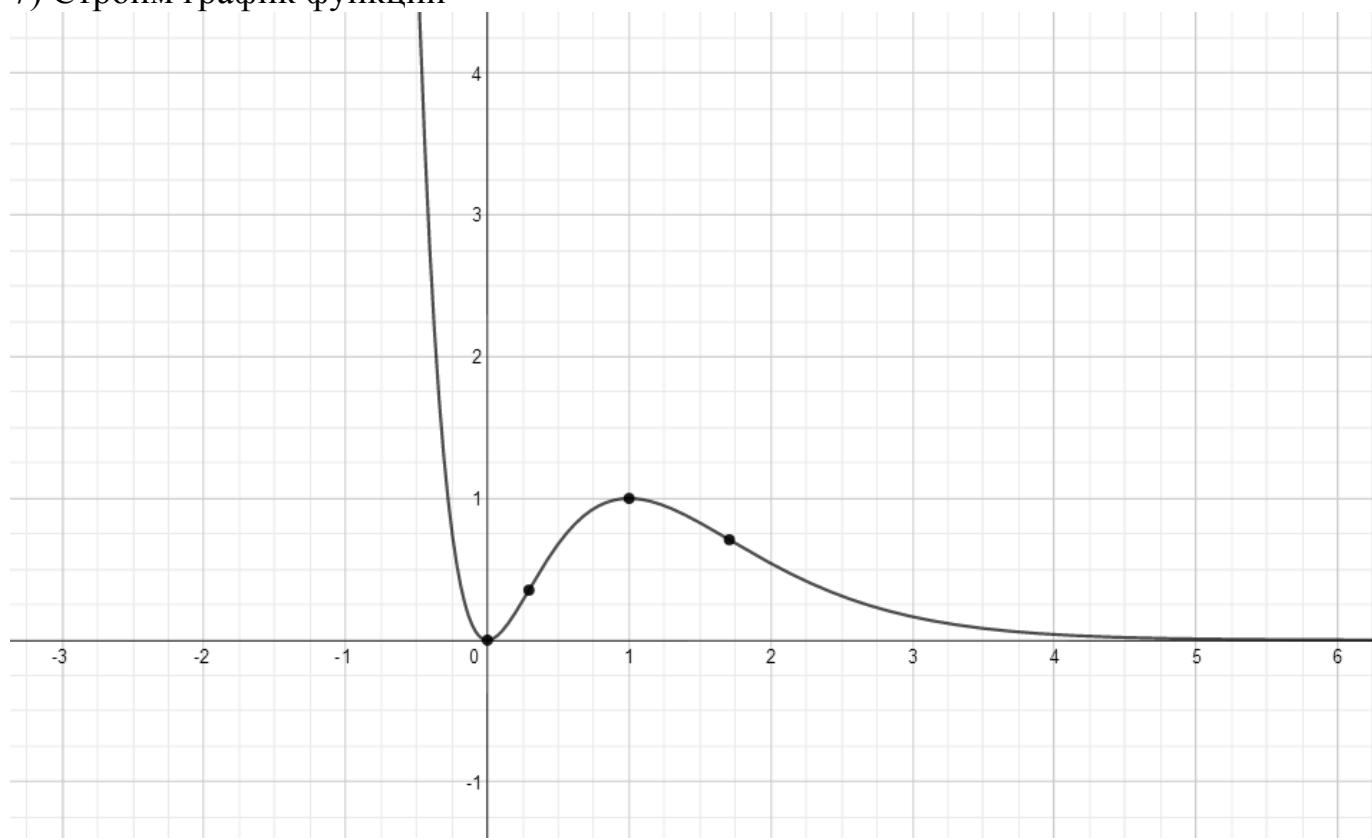
Так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{-2x+2}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-2x+2} = 0$$

$y = 0$ — наклонная асимптота

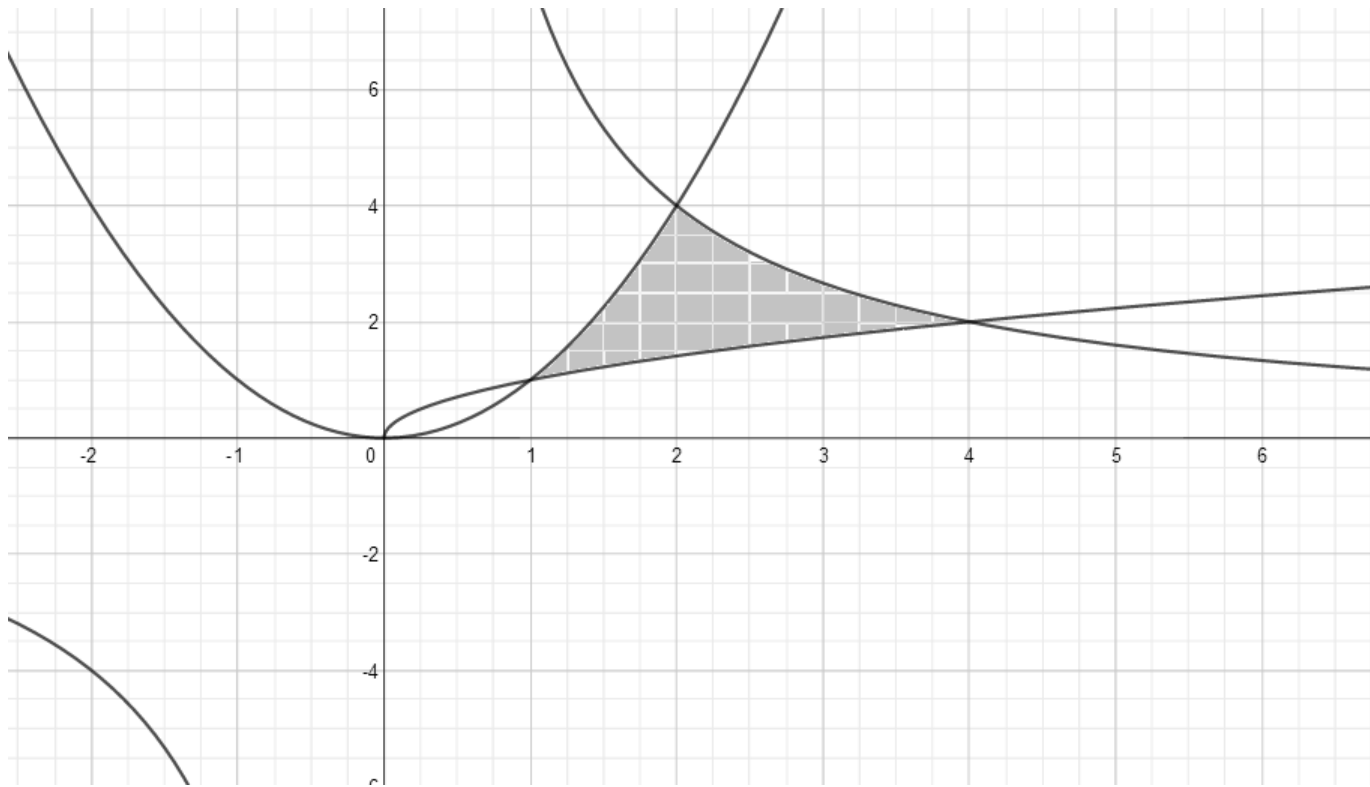
7) Строим график функции



4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{8}{x}$, $y = \sqrt{x}$. Сделать чертеж.

Решение.

Построим графики функций $y = x^2$, $y = \frac{8}{x}$, $y = \sqrt{x}$.



Найдем точки пересечения:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{8}{x} \\
 x_1 &= 2 \\
 x^2 &= \sqrt{x} \\
 x_1 &= 0; x_2 = 1 \\
 \sqrt{x} &= \frac{8}{x} \\
 x
 \end{aligned}$$

Формула для вычисления площади имеет вид:

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx + \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx \\
 S_1 &= \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} \right) \\
 &= 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 1.1144 \text{ (кв. ед.)} \\
 S_2 &= \int_2^4 \left(\frac{8}{x} - \sqrt{x} \right) dx = \left(8 \ln x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right) \Big|_2^4 \\
 &= \left(8 \ln 4 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3} \right) - \left(8 \ln 2 - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} \right) \approx 2.0975 \text{ (кв. ед.)} \\
 S &= S_1 + S_2 = 1.1144 + 2.0975 = 3.2119
 \end{aligned}$$

Ответ: $S = 3.2119$ (кв. ед.)

5. Найти определенный интеграл

$$\int_0^1 x^3 \ln(1+x^2) dx$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 \ln(1+x^2) dx &= uv - \int v du = \left[\begin{array}{l} u = \ln(1+x^2) \\ du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = x^3 dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right] \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4}{4} * \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^5}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{8} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\left(\frac{1^4}{4} \ln(1+1^2) \right) - \left(\frac{0^4}{4} \ln(1+0^2) \right) \right) \\ &\quad - \left(\left(\frac{1^4}{8} - \frac{1^2}{4} + \frac{1}{4} \ln(1^2+1) + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{0^4}{8} - \frac{0^2}{4} + \frac{1}{4} \ln(0^2+1) + \frac{1}{8} \right) \right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

6. Экспериментальные данные о переменных x и y приведены в таблице:

x	-1	0	2	4	7
y	0	1	1.3	1.6	1.9

В результате их выравнивания получена функция $y = \sqrt[3]{x}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найти параметры a и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

Решение.

Линейное уравнение регрессии имеет вид $y = bx + a + \varepsilon$

Здесь ε - случайная ошибка (отклонение, возмущение).

Причины существования случайной ошибки:

1. Невключение в регрессионную модель значимых объясняющих переменных;

2. Агрегирование переменных. Например, функция суммарного потребления – это попытка общего выражения совокупности решений отдельных индивидов о расходах. Это лишь аппроксимация отдельных соотношений, которые имеют разные параметры.

3. Неправильное описание структуры модели;

4. Неправильная функциональная спецификация;

5. Ошибки измерения.

Так как отклонения ε_i для каждого конкретного наблюдения i – случайны и их значения в выборке неизвестны, то:

1) по наблюдениям x_i и y_i можно получить только оценки параметров α и β

2) Оценками параметров α и β регрессионной модели являются соответственно величины a и b , которые носят случайный характер, т.к. соответствуют случайной выборке;

Оценочное уравнение регрессии (построенное по выборочным данным) будет иметь вид $y = bx + a + \varepsilon$, где ε_i – наблюдаемые значения (оценки) ошибок ε_i , a и b соответственно оценки параметров α и β регрессионной модели, которые следует найти.

Для оценки параметров α и β - используют МНК (метод наименьших квадратов).

Метод наименьших квадратов дает наилучшие (состоятельные, эффективные и несмещенные) оценки параметров уравнения регрессии. Но только в том случае, если выполняются определенные предпосылки относительно случайного члена (ε) и независимой переменной (x).

Формально критерий МНК можно записать так:

$$S = \sum (y_i - y_i^*)^2 \rightarrow \min$$

Система нормальных уравнений.

$$a \cdot n + b \sum x = \sum y$$

$$a \sum x + b \sum x^2 = \sum y \cdot x$$

Для наших данных система уравнений имеет вид

$$5a + 12b = 5.8$$

$$12a + 70b = 22.3$$

Из первого уравнения выражаем a и подставим во второе уравнение:

Получаем эмпирические коэффициенты регрессии: $b = 0.2034$, $a = 0.6718$

Уравнение регрессии (эмпирическое уравнение регрессии):

$$y = 0.2034x + 0.6718$$

Эмпирические коэффициенты регрессии a и b являются лишь оценками теоретических коэффициентов β_i , а само уравнение отражает лишь общую тенденцию в поведении рассматриваемых переменных.

Для расчета параметров регрессии построим расчетную таблицу

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$
-1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
2	1.3	4	1.69	2.6
4	1.6	16	2.56	6.4

7	1.9	49	3.61	13.3
12	5.8	70	8.86	22.3

Параметры уравнения регрессии.

Выборочные средние.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{5.8}{5} = 1.16$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{22.3}{5} = 4.46$$

Выборочные дисперсии:

$$S^2(x) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{70}{5} - 2.4^2 = 8.24$$

$$S^2(y) = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{8.86}{5} - 1.16^2 = 0.43$$

Среднеквадратическое отклонение

$$S(x) = \sqrt{S^2(x)} = \sqrt{8.24} = 2.87$$

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)} = \sqrt{0.43} = 0.65$$

Рассчитываем показатель тесноты связи. Таким показателем является выборочный линейный коэффициент корреляции, который рассчитывается по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S(x) \cdot S(y)} = \frac{4.46 - 2.4 \cdot 1.16}{2.87 \cdot 0.65} = 0.89$$

Линейный коэффициент корреляции принимает значения от -1 до +1.

Связи между признаками могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии оцениваются по шкале Чеддока:

$0.1 < r_{xy} < 0.3$: слабая;

$0.3 < r_{xy} < 0.5$: умеренная;

$0.5 < r_{xy} < 0.7$: заметная;

$0.7 < r_{xy} < 0.9$: высокая;

$0.9 < r_{xy} < 1$: весьма высокая;

В нашем примере связь между признаком Y фактором X высокая и прямая.

Кроме того, коэффициент линейной парной корреляции может быть определен через коэффициент регрессии b:

$$r_{x,y} = b \frac{S(x)}{S(y)}$$

Уравнение регрессии (оценка уравнения регрессии).

$$y_x = r_{xy} \frac{x - \bar{x}}{S(x)} S(y) + \bar{y} = 0.89 \frac{x - 2.4}{2.87} 0.65 + 1.16 = 0.2x + 0.67$$

Линейное уравнение регрессии имеет вид $y = 0.2x + 0.67$

Для того, чтобы выяснить, какая функция лучше выравнивает экспериментальные данные, вычислим суммы квадратов отклонений

$$S_1 = \sum_{i=1}^5 (y_i - (0.2x_i + 0.67))^2$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - (\sqrt[3]{x_i}))^2$$

Для этого заполним таблицу

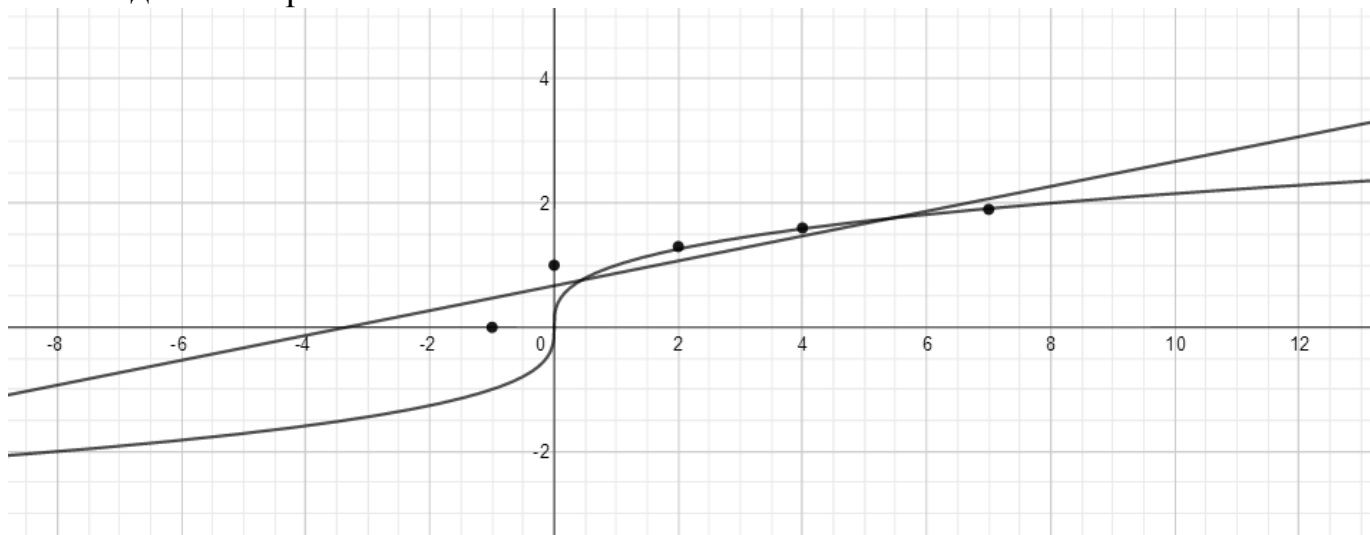
Таблица							
x_i	y_i	$0.2x_i + 0.67$	$\sqrt[3]{x_i}$	$y_i - (0.2x_i + 0.67)$	$y_i - \sqrt[3]{x_i}$	$(y_i - (0.2x_i + 0.67))^2$	$(y_i - \sqrt[3]{x_i})^2$
-1	0	0,47	-1	-0,47	1	0,2209	1
0	1	0,67	0	0,33	1	0,1089	1
2	1.3	1,07	1,2599	0,23	0,0401	0,0529	0,0016
4	1.6	1,47	1,5874	0,13	0,0126	0,0169	0,0002
7	1.9	2,07	1,9129	-0,17	-0,013	0,0289	0,0002
						0,4285	2,0019

Таким образом,

$$S_1 = 0.4285$$

$$S_2 = 2.0019$$

т.е. $S_2 > S_1$, поэтому лучше аппроксимирует данные функция $y = 0.2x + 0.67$. Сделаем чертеж:



7. Решить дифференциальное уравнение

$$y^2 + x^2 y' = x y y'$$

Решение.

Сделаем замену:

$$\begin{aligned} y &= xv; y' = v + xv' \\ x^2(xv' + v) + x^2v^2 &= x^2(xv' + v)v \\ x^2(xv' + v^2 + v) &= x^2(xv' + v)v \end{aligned}$$

$$v' = \frac{v}{x(v-1)}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x(v-1)}$$

$$\int \frac{(v-1)dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$v - \ln v = \ln x + C$$

Общее решение имеет вид:

$$y = xv; v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x}\right) - \ln x = C$$