

**1. Найти предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x - 1}{x^2 - x}$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x - 1}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - x - 1)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} - 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2xe^{x^2} - 1)'}{(2x - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}(1 + 2x^2)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}(1 + 2x^2)}{1} = 1 \end{aligned}$$

**2. Найти производную функции:**

$$y = \ln \left( \frac{3x^4 * e^{5x+2}}{\sqrt{4-x^2}} \right) + x * 10^{\sqrt{x}} + e^{-5}$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \left( \frac{3x^4 * e^{5x+2}}{\sqrt{4-x^2}} \right) + x * 10^{\sqrt{x}} + e^{-5} \right)' \\ y' &= \left( \ln \frac{3x^4 e^{5x+2}}{\sqrt{4-x^2}} + x \cdot 10^{\sqrt{x}} + e^{-5} \right)' = \left( \frac{1}{\frac{3x^4 e^{5x+2}}{\sqrt{4-x^2}}} \cdot \left( \frac{3x^4 e^{5x+2}}{\sqrt{4-x^2}} \right)' + (x)' \cdot 10^{\sqrt{x}} + x \cdot (10^{\sqrt{x}})' + (e^{-5})' \right) = \\ &= \left( \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x^4 e^{5x+2}} \right) \cdot \frac{(3x^4 e^{5x+2})' \sqrt{4-x^2} - 3x^4 e^{5x+2} \cdot (\sqrt{4-x^2})'}{(\sqrt{4-x^2})^2} + 10^{\sqrt{x}} + x \cdot 10^{\sqrt{x}} \frac{\ln 10}{2\sqrt{x}} + 0 = \\ &= \left( \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x^4 e^{5x+2}} \right) \cdot \frac{(12x^3 e^{5x+2} + 15x^4 e^{5x+2}) \sqrt{4-x^2} - 3x^4 e^{5x+2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} + \\ &+ 10^{\sqrt{x}} + x \cdot 10^{\sqrt{x}} \frac{\ln 10}{2\sqrt{x}} = \left( \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x^4 e^{5x+2}} \right) \cdot \frac{(12x^3 e^{5x+2} + 15x^4 e^{5x+2})(4-x^2) + 3x^5 e^{5x+2}}{\sqrt{4-x^2}(4-x^2)} + \\ &+ 10^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} 10^{\sqrt{x}} \ln \sqrt{10} = \frac{3x^3 e^{5x+2}(16 + 20x - 3x^2 - 5x^3)}{3x^4 e^{5x+2}(4-x^2)} + 10^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} 10^{\sqrt{x}} \ln \sqrt{10} = \\ &= \frac{16 + 20x - 3x^2 - 5x^3}{x(4-x^2)} + 10^{\sqrt{x}} (1 + \sqrt{x} \ln \sqrt{10}). \end{aligned}$$

**3. Число 49 представить в виде произведения двух положительных множителей, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.**

**Решение.**

Пусть первое число будет  $x$ , тогда второе обозначим  $\frac{49}{x}$ , а сумму их квадратов обозначим как функцию  $f(x) = x^2 + \frac{2401}{x^2} = \frac{x^4 + 2401}{x^2}$ . Найдем при каком значении  $x$  ( $x > 0$ ) функция примет наименьшее значение:

$$f'(x) = \left( \frac{x^4 + 2401}{x^2} \right)' = \frac{(x^4 + 2401)' x^2 - (x^4 + 2401)(x^2)'}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 4802x}{x^4} =$$

$$= \frac{2x^5 - 4802x}{x^4} = \frac{2(x^2 - 49)(x^2 + 49)}{x^3} = \frac{2(x - 7)(x + 7)(x^2 + 49)}{x^3};$$

$$f'(x) = 0$$

$$2(x - 7)(x + 7)(x^2 + 49) = 0 \Rightarrow x = 7 \in (0; +\infty);$$

$$\begin{array}{c} f'(x) \quad 0 \quad - \quad 7 \quad + \quad \text{---} x \\ f(x) \quad \searrow \quad \nearrow \\ \quad \quad \text{min} \end{array}$$

Значит, при  $x = 7$  указанная функция принимает наименьшее значение, т.е. исходные числа 7 и 7.

**Ответ:** 7 и 7.

**4. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = -x^2 + 6x - 5$ , перпендикулярной прямой  $x - 2y + 7 = 0$ . Сделать чертеж.**

**Решение.**

$$x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow y = 0,5x + 3,5; \Rightarrow k = 0,5.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{0,5} = -2;$$

Т.к.  $y' = k$  и

$$y' = (-x^2 + 6x - 5)' = -2x + 6$$

то

$$-2x + 6 = -2; \quad x = 4;$$

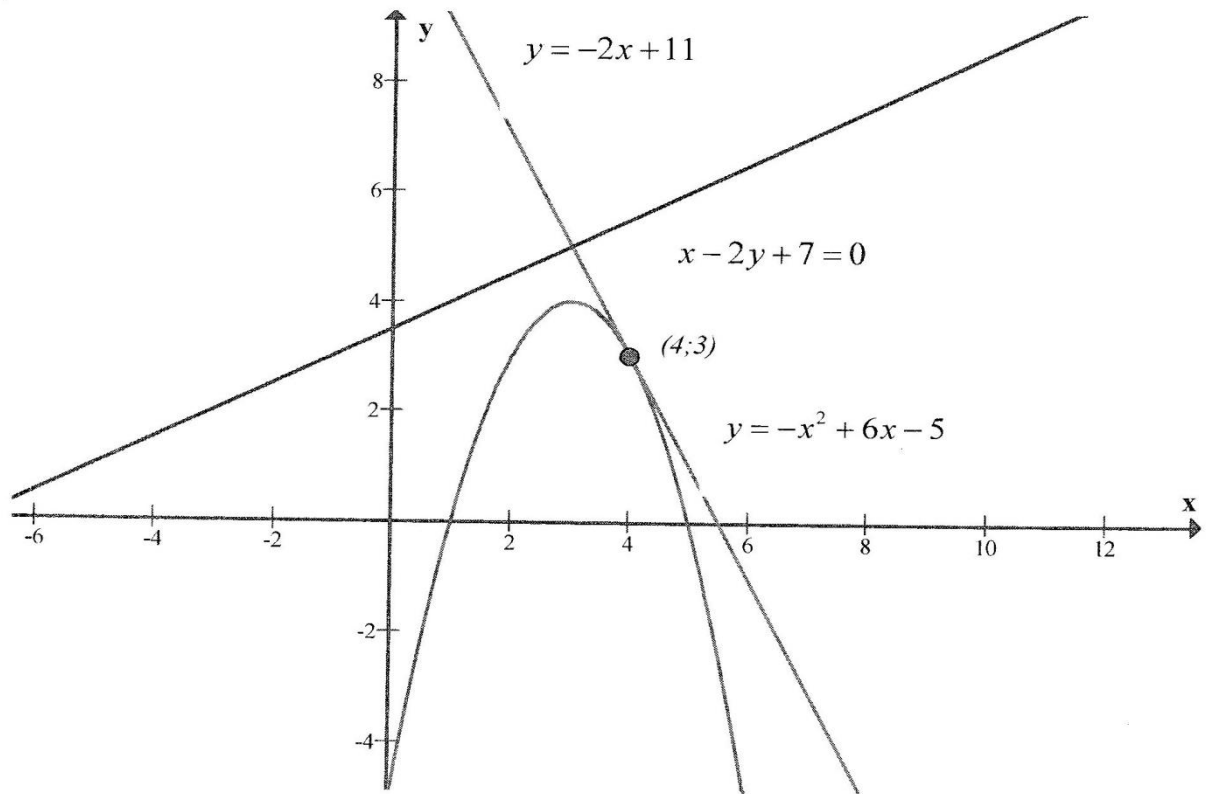
Составим уравнение касательной в этой точке:

$$y' = -2x + 6;$$

$$y'(4) = -8 + 6 = -2;$$

$$y(4) = -16 + 24 - 5 = 3;$$

$$y = 3 - 2(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 11;$$



**5. Исследовать функцию и построить схематично ее график**

$$y = e^{x-2}(5 - x)$$

**Решение.**

1)  $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$

2)  $E(y): y \in (-\infty; +\infty)$

3)  $x = 0; y = \frac{5}{e^2}$ , т. е.  $y = e^{0-2}(5 - 0) = \frac{5}{e^2}$

$y = 0, x = 5$

$(5; 0)$

4) Интервалы знака постоянства



$$y > 0 \quad x \in (-\infty; 5)$$

$$y < 0 \quad x \in (5; +\infty)$$

5) Четность, нечетность функции  $f(-x)$

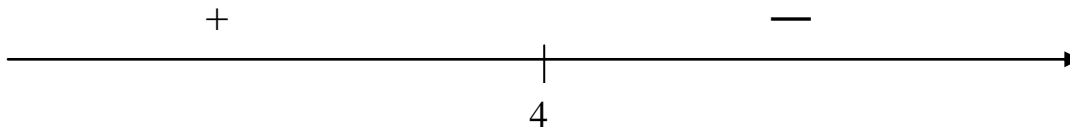
$$y = e^{-x-2}(5 - (-x)) = e^{-x-2}(5 + x) = -f(x) - \text{функция не четная}$$

График симметричен относительно оси Oy

6) Экстремумы функции.

Найдем производную

$$y' = (e^{x-2}(5 - x))' = (e^{x-2})'(5 - x) + (e^{x-2})(5 - x)' = -e^{x-2}(x - 4) - e^{x-2}(x - 4) = 0; \quad x = 4$$



В точке с абсциссой  $x = 4$  функция имеет максимум, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус.

$$y(4) = e^{4-2}(5 - 4) = e^2$$

7) Интервалы монотонности функции

При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y' > 0$  функция возрастает  $y \uparrow, x \in (-\infty, 4)$

При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y' < 0$  функция убывает  $y \downarrow, x \in (4, +\infty)$

8) Точки перегиба графика функции

Находим вторую производную

$$y'' = (-e^{x-2}(x - 4))' = (-e^{x-2})'(x - 4) + (-e^{x-2})(x - 4)' = -e^{x-2}(x - 3) \\ y'' = 0; \quad -e^{x-2}(x - 3) = 0; \quad x = 3$$



9) Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y'' > 0$  функция вогнута  $y \cup, x \in (-\infty; 3)$

При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y'' < 0$  график функции выпуклый  $y \cap, x \in (3; +\infty)$

10) Результаты исследования, оформляем таблицами

$x$	$x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$y'$	+	$e^2$	—



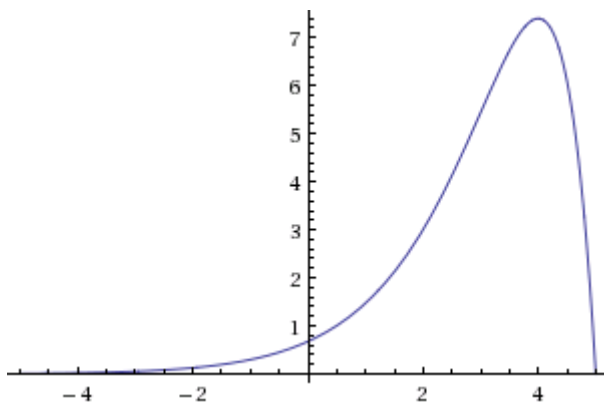
$y'$		max	
------	---	-----	---

Таблица для второй производной:

$x$	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$y'$	+		—
$y''$	∪		∩

Строим график:



**6. Исследовать функцию и построить схематично ее график**

$$y = x + \frac{27}{x^3}$$

**Решение.**

1)  $D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2)  $E(y): y \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

3)  $x \neq 0$  не пересекаются

$y = 0$  не пересекаются

4) Четность, нечетность функции  $f(-x)$

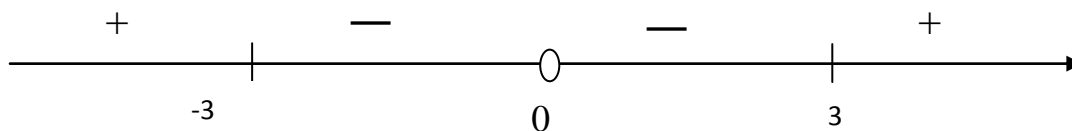
$$y = (-x) + \frac{27}{(-x)^3} = -x - \frac{27}{x^3} = -f(x) \text{ — функция нечетная}$$

5) Экстремумы функции.

Найдем производную

$$y' = \left(x + \frac{27}{x^3}\right)' = 1 - \frac{81}{x^4}$$

$$1 - \frac{81}{x^4} = 0; x \neq 0; x_1 = -3; x_2 = 3;$$



В точке с абсциссой  $x_2 = 3$  функция имеет минимум, т.к. при переходе через эту точку первая производная меняет знак с минуса на плюс.

$$y_{\min}(3) = 3 + \frac{27}{3^3} = 4$$

В точке с абсциссой  $x = -3$  функция имеет максимум, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус.

$$y_{\max}(-3) = 0^4 - 5 * 0^2 + 6 = -4$$

6) Интервалы монотонности функции

При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y' > 0$  функция возрастает  $y \uparrow$ ,  $x \in (-\infty, -3) \cup (3; +\infty)$

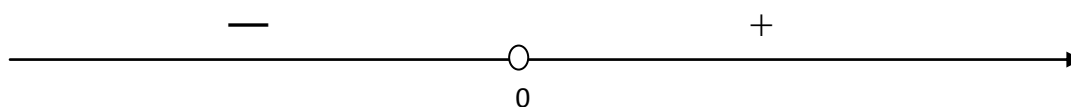
При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y' < 0$  функция убывает  $y \downarrow$ ,  $x \in (-3, 0) \cup (0; 3)$

7) Точки перегиба графика функции

Находим вторую производную

$$y'' = \left(1 - \frac{81}{x^4}\right)' = \frac{324}{x^5}$$

$$y'' = 0; \frac{324}{x^5} = 0; x \neq 0; x = \emptyset$$



8) Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y'' > 0$  функция вогнута  $y \cup$ ,  $x \in (0; +\infty)$

При тех значениях  $x$  из области определения, где  $y'' < 0$  график функции выпуклый  $y \cap$ ,  $x \in (-\infty; 0)$

9) Результаты исследования, оформляем таблицами





$x$	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x \neq 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$y'$	+	-4				4	+
$y''$		max				min	

Таблица для второй производной:

$x$	$x < 0$	$x \neq 0$	$x > 0$
$y'$	+		+
$y''$	∩		∪

Строим график:

