

### Вариант №3

#### Задача 1

Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9, второе – 0,95, третье – 0,85.

Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство;

б) два устройства;

в) хотя бы одно устройство.

Решение.

В данной задаче независимо производятся три эксперимента, состоящие в работе каждого из трёх устройств.

Обозначим:

$A_1$  – событие, состоящее в том, что при аварии сработает первое устройство;

$A_2$  – событие, состоящее в том, что при аварии сработает второе устройство;

$A_3$  – событие, состоящее в том, что при аварии сработает третье устройство;

$B$  – событие, состоящее в том, что при аварии сработает только одно устройство;

$C$  – событие, состоящее в том, что при аварии сработают два устройства;

$D$  – событие, состоящее в том, что при аварии сработает хотя бы одно устройство.

По условию:  $P(A_1) = 0,9$ ;  $P(A_2) = 0,95$ ;  $P(A_3) = 0,85$ .

Событие  $\bar{A}_1$ , противоположное событию  $A_1$ , состоит в том, что при аварии первое устройство не работает;  $P \bar{A}_1 = 1 - P A_1 = 1 - 0,9 = 0,1$ .

Событие  $\bar{A}_2$ , противоположное событию  $A_2$ , состоит в том, что при аварии второе устройство не работает;  $P \bar{A}_2 = 1 - P A_2 = 1 - 0,95 = 0,05$ .

Событие  $\bar{A}_3$ , противоположное событию  $A_3$ , состоит в том, что при аварии третье устройство не работает;  $P \bar{A}_3 = 1 - P A_3 = 1 - 0,85 = 0,15$ .

Найдём  $P B$ ,  $P C$  и  $P D$ .

а) Событие  $B$  есть сумма несовместных событий  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ :

$$B = B_1 + B_2 + B_3,$$

где  $B_1$  – событие, состоящее в том, что при аварии 1-ое устройство работает, а 2-ое и 3-е устройство не работает;

$B_2$  – событие, состоящее в том, что при аварии 2-ое устройство работает, а 1-ое и 3-е устройство не работает;

$B_3$  – событие, состоящее в том, что при аварии 3-е устройство работает, а 1-ое и 2-ое устройство не работает.

Учитывая независимость событий  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , по теореме умножения вероятностей получаем:

$$P B_1 = P A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 = P A_1 \cdot P \bar{A}_2 \cdot P \bar{A}_3 = 0,9 \cdot 0,05 \cdot 0,15 = 0,00675 ;$$

$$P B_2 = P \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 = P \bar{A}_1 \cdot P A_2 \cdot P \bar{A}_3 = 0,1 \cdot 0,95 \cdot 0,15 = 0,01425 ;$$

$$P B_3 = P \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 = P \bar{A}_1 \cdot P \bar{A}_2 \cdot P A_3 = 0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,85 = 0,00425 .$$

Учитывая несовместность событий  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ , по теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем:

$$P B = P B_1 + B_2 + B_3 = P B_1 + P B_2 + P B_3 = 0,00675 + 0,01425 + 0,00425 = 0,02525 .$$

б) Событие  $C$  есть сумма несовместных событий  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ :

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$

где  $C_1$  – событие, состоящее в том, что при аварии 1-ое устройство не работает, а 2-ое и 3-е устройство работает;

$C_2$  – событие, состоящее в том, что при аварии 2-ое устройство не сработает, а 1-ое и 3-е устройство сработает;

$C_3$  – событие, состоящее в том, что при аварии 3-е устройство не сработает, а 1-ое и 2-ое устройство сработает.

Учитывая независимость событий  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , по теореме умножения вероятностей получаем:

$$P \overline{C_1} = P \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 = P \overline{A_1} \cdot P A_2 \cdot P A_3 = 0,1 \cdot 0,95 \cdot 0,85 = 0,08075 ;$$

$$P \overline{C_2} = P A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 = P A_1 \cdot P \overline{A_2} \cdot P A_3 = 0,9 \cdot 0,05 \cdot 0,85 = 0,03825 ;$$

$$P \overline{C_3} = P A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} = P A_1 \cdot P A_2 \cdot P \overline{A_3} = 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,15 = 0,12825 .$$

Учитывая несовместность событий  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , по теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем:

$$P \overline{C} = P \overline{C_1} + \overline{C_2} + \overline{C_3} = P \overline{C_1} + P \overline{C_2} + P \overline{C_3} = 0,08075 + 0,03825 + 0,12825 = 0,24725 .$$

в) Событие  $\overline{D}$ , противоположное событию  $D$ , состоит в том, что при аварии не сработает ни одно устройство:  $\overline{D} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ .

Учитывая независимость событий  $\overline{A_1}$ ,  $\overline{A_2}$  и  $\overline{A_3}$ , по теореме умножения вероятностей получаем:

$$P \overline{D} = P \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} = P \overline{A_1} \cdot P \overline{A_2} \cdot P \overline{A_3} = 0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,15 = 0,00075 .$$

$$\text{Следовательно, } P D = 1 - P \overline{D} = 1 - 0,00075 = 0,99925 .$$

**Ответ:** 1) 0,02525 ; 2) 0,24725 ; 3) 0,99925 .

## Задача 2

В каждом испытании некоторое событие  $A$  происходит с вероятностью  $p = 0,5$ . Произведено 1600 независимых испытаний. Найти границы для частоты, симметричные относительно  $p$ , которые можно гарантировать с вероятностью 0,95.

Решение.

Воспользуемся следствием интегральной теоремы Муавра – Лапласа:

если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом из испытаний постоянна и отлична от 0 и 1, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность заданного отклонения относительной частоты (частости  $\frac{m}{n}$ ) появления события  $A$  от его вероятности  $p$  вычисляется по

приближённой формуле  $P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \delta\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$ , где

$p$  – вероятность наступления события  $A$  в каждом из испытаний,

$q$  – вероятность ненаступления события  $A$  в каждом из испытаний,

$n$  – число испытаний,  $\delta$  – заданное отклонение,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  – функция Лапласа.

В нашем случае  $p = 0,5$ ;  $q = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$ .

Найдём отклонение  $\delta$ , при котором  $P_{1600}\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| \leq \delta\right) = 0,95$ , то есть

в силу следствия интегральной теоремы Муавра – Лапласа

$$P_{1600}\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| \leq \delta\right) = 0,95 \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Итак, найдём  $\delta$  из выражения  $2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \approx 0,95$ :  $\Phi\left(\frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \approx 0,475$ .

По таблице значений функции Лапласа находим:  $\Phi(1,96) \approx 0,475$ .

Следовательно,  $\frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \approx 1,96$ , откуда  $\delta \approx \frac{1,96 \cdot \sqrt{pq}}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot \sqrt{0,5 \cdot 0,5}}{\sqrt{1600}} = 0,0245$ .

Значит с вероятностью 0,95 можно ожидать отклонение  $\delta \approx 0,0245$  относительной частоты появления события  $A$  от  $p = 0,5$ .

Соответственно границы для частости, симметричные относительно  $p$ , которые можно гарантировать с вероятностью 0,95:

$$p - \delta; \quad p + \delta = 0,5 - 0,0245; \quad 0,5 + 0,0245 = 0,4755; \quad 0,5245.$$

**Ответ:**  $0,4755; \quad 0,5245$ .

### Задача 3

На двух станках получают детали одинаковой номенклатуры. Случайные величины  $X$  и  $Y$  – число бракованных деталей в партиях деталей за смену, произведённых на каждом из станков, – характеризуются следующими законами распределения:

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 1   | 2   | 3   |
| $p_i$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

|       |       |     |     |     |
|-------|-------|-----|-----|-----|
| $x :$ | $y_j$ | 0   | 1   | 2   |
|       | $p_j$ | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

$Y :$

Составить закон распределения случайной величины  $Z$  – общего числа бракованных деталей в объединённой партии деталей, произведённых на двух станках. Найти её математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

Решение.

Составим закон распределения случайной величины  $Z$  – общего числа бракованных деталей в объединённой партии деталей, произведённых на двух станках. Возможные значения случайной величины  $Z$ : 0, 1, 2, 3.

|       |   |     |     |     |
|-------|---|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 0 | 1   | 2   | 3   |
| $p_i$ | 0 | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

|       |       |     |     |     |   |
|-------|-------|-----|-----|-----|---|
| $x :$ | $y_j$ | 0   | 1   | 2   | 3 |
|       | $p_j$ | 0,6 | 0,3 | 0,1 | 0 |

$Y :$

Вероятности возможных значений случайной величины  $Z$  определим как средние арифметические значения вероятностей соответствующих возможных значений случайных величин  $X$  и  $Y$ :

$$p_k = \frac{p_i + p_j}{2}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины  $Z$  имеет вид:

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $z_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|---|---|---|

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $p_k$ | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,1 |
|-------|-----|-----|-----|-----|

Убеждаемся в том, что сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1.

$$\text{Действительно, } \sum_{k=1}^4 p_k = 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,1 = 1.$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $Z$ .

|       |       |       |         |       |
|-------|-------|-------|---------|-------|
| $z_k$ | $z_1$ | $z_2$ | $\dots$ | $z_l$ |
| $p_k$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_l$ |

Математическое ожидание дискретной случайной величины  $Z$ , закон распределения которой имеет вид, вычисляется по формуле  $M Z = \sum_{k=1}^l z_k p_k$ .

В нашем случае

$$M Z = \sum_{k=1}^4 z_k p_k = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 = 0 + 0,3 + 0,6 + 0,3 = 1,2.$$

Дисперсия характеризует степень изменчивости значений случайной величины относительно её математического ожидания. Дисперсию дискретной случайной величины  $Z$  определим по формуле:

$$D Z = M Z^2 - (M Z)^2, \text{ где } M Z^2 = \sum_{k=1}^l z_k^2 p_k.$$

$$M Z^2 = \sum_{k=1}^4 z_k^2 p_k = 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,1 = 0 + 0,3 + 1,2 + 0,9 = 2,4,$$

$$\text{значит } D Z = M Z^2 - (M Z)^2 = 2,4 - 1,2^2 = 2,4 - 1,44 = 0,96.$$

Функция распределения вероятностей (интегральная функция распределения)  $F(z)$  случайной величины  $Z$  задаётся формулой

$$F(x) = P X < x.$$

При построении функции  $F(x)$  будем получать её аналитическое выражение на каждом промежутке разбиения числовой прямой точками,

соответствующими значениям заданной случайной величины, используя теорему сложения вероятностей несовместных событий:

а) для  $z \leq 0$   $F(z) = P Z < z = 0$ , так как в данном случае мы имеем дело с вероятностью невозможного события (в частности для  $z = 0$   $F(0) = P Z < 0 = 0$ );

б) для  $0 < z \leq 1$   $F(z) = P Z = 0 = 0,3$  (в частности для  $z = 1$   $F(1) = P Z < 1 = 0,3$ );

в) для  $1 < z \leq 2$   $F(z) = P Z = 0 + P Z = 1 = 0,6$  (в частности для  $z = 2$   $F(2) = P Z < 2 = 0,6$ );

г) для  $2 < z \leq 3$   
 $F(z) = P Z = 0 + P Z = 1 + P Z = 2 = 0,3 + 0,3 + 0,3 = 0,9$  (в частности для  $z = 3$   $F(3) = P Z < 3 = 0,9$ );

е) для  $z > 3$   
 $F(z) = P Z = 0 + P Z = 1 + P Z = 2 + P Z = 3 = 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,1 = 1$ .

Обобщая полученные данные, можно записать:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0; \\ 0,3 & \text{при } 0 < z \leq 1; \\ 0,6 & \text{при } 1 < z \leq 2; \\ 0,9 & \text{при } 2 < z \leq 3; \\ 1 & \text{при } z > 3. \end{cases}$$

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $z_k$ | 0   | 1   | 2   | 3   |
| $p_k$ | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,1 |

**Ответ:** ;  $M X = 1,2$ ;  $D X = 0,96$ ;

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0; \\ 0,3 & \text{при } 0 < z \leq 1; \\ 0,6 & \text{при } 1 < z \leq 2; \\ 0,9 & \text{при } 2 < z \leq 3; \\ 1 & \text{при } z > 3. \end{cases}$$

#### Задача 4

1. В некотором городе по схеме собственно случайной бесповторной выборки было обследовано 80 магазинов розничной торговли из 2500 с

целью изучения объема розничного товарооборота. Получены следующие данные: (таблица 1)

Таблица 1

| Товарооборот,<br>у.е. | Менее<br>60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-<br>100 | Более100 | Итого |
|-----------------------|-------------|-------|-------|-------|------------|----------|-------|
| Число<br>магазинов    | 12          | 19    | 23    | 18    | 5          | 3        | 80    |

Найти:

а) вероятность того, что средний объем розничного товарооборота во всех магазинах города отличается от среднего объема розничного товарооборота, полученного в выборке, но не более, чем на 4 у.е. (по абсолютной величине).

б) границы, в которых с вероятностью 0,98 заключена доля магазинов с объемом розничного товарооборота от 60 до 90 у.е.;

в) объем бесповторной выборки, при которой те же границы для среднего объема розничного товарооборота (см. п. а) можно гарантировать с вероятностью 0,95).

А) средний товарооборот по выборке:

$$\bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{55*12 + 65*19 + \dots + 95*5 + 105*3}{80} = 74.25 \text{ тыс. руб.}$$

Среднеквадратическое «исправленное» отклонение по выборке

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f - 1}} = 12.9$$

Ошибка выборочной средней



$$\Delta = t \sqrt{\frac{S^2}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

$$t = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{12.9}{80-1} \left(1 - \frac{80}{2500}\right)}} = 0.217 \Rightarrow p = 0.414$$

Б) Ошибка доли

$$\Delta_w = t \sqrt{\frac{W(1-W)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

$$W = 0.75$$

$$\gamma = 0.98 \Rightarrow t = 2.64$$

$$\Delta_w = 2.64 \sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{80} \left(1 - \frac{80}{2500}\right)} = 0.125$$

$$0.75 - 0.125 \leq W \leq 0.75 + 0.125$$

$$0.675 \leq W \leq 0.875$$

В)

$$\alpha = 0.95 \Rightarrow t = 2$$

$$\Delta = 4 = 2 \sqrt{\frac{12.9^2}{n-1} \left(1 - \frac{n}{2500}\right)} \Rightarrow n = 42$$

### Задание №5

3. Имеются следующие выборочные данные о рыночной стоимости квартир  $Y$  (тыс. у.е.) и их общей площади  $X$  ( $m^2$ ).

| $y \backslash x$ | 13-18 | 18-23 | 23-28 | 28-33 | 33-37 | Итого |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 33-49            | 4     | 2     | 1     |       |       | 7     |
| 49-65            | 2     | 6     | 4     | 1     |       | 13    |
| 65-81            | 1     | 4     | 9     | 4     | 1     | 19    |
| 81-97            |       |       | 3     | 6     | 3     | 12    |
| 97-113           |       |       | 1     | 3     | 5     | 9     |
| Итого            | 7     | 12    | 18    | 14    | 9     | 60    |

Необходимо:

1. Вычислить групповые средние  $\bar{x}_i$  и  $\bar{y}_i$ , построить эмпирические линии регрессии.

2. Предполагая, что между переменными  $X$  и  $Y$  существует линейная корреляционная зависимость;

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции; на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными  $X$  и  $Y$ ;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить стоимость квартиры общей площадью  $75 \text{ м}^2$ .

#### Решение:

Заменим интервалы серединой этих интервалов:

| $\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$ |     | 13-18 | 18-23 | 23-28 | 28-33 | 33-37 | Итого |
|--------------------------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                      |     | 15,5  | 20,5  | 25,5  | 30,5  | 35,5  |       |
| 33-49                                | 41  | 4     | 2     | 1     |       |       | 7     |
| 49-65                                | 57  | 2     | 6     | 4     | 1     |       | 13    |
| 65-81                                | 73  | 1     | 4     | 9     | 4     | 1     | 19    |
| 81-97                                | 89  |       |       | 3     | 6     | 3     | 12    |
| 97-113                               | 105 |       |       | 1     | 3     | 5     | 9     |
| Итого                                |     | 7     | 12    | 18    | 14    | 9     | 60    |

$$1. \bar{y}_i = \frac{\sum y_i n_{ij}}{n_x}; \bar{x}_j = \frac{\sum x_j n_{ij}}{n_y}$$

$$\bar{y}_{x=41} = 18,36$$

$$\bar{y}_{x=57} = 22,04$$

$$\bar{y}_{x=73} = 25,5$$

$$\bar{y}_{x=89} = 30,5$$

$$\bar{y}_{x=105} = 32,72$$

$$\bar{x}_{y=15,5} = 50,14$$

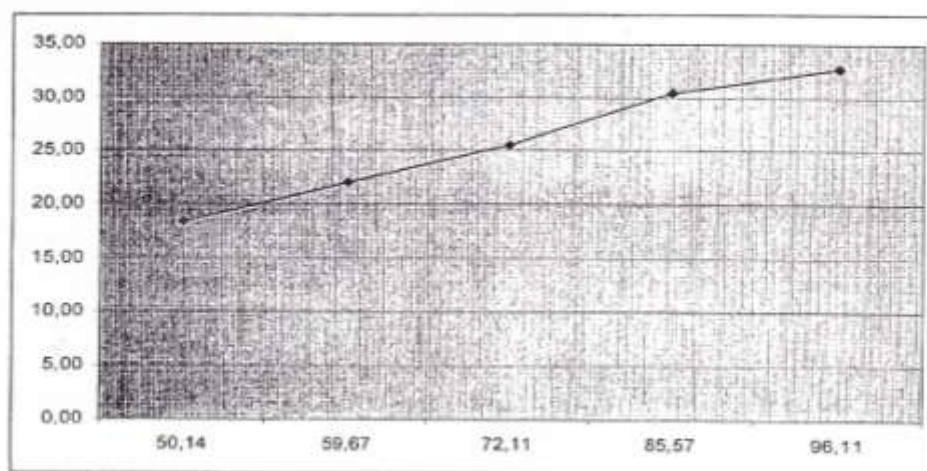
$$\bar{x}_{y=20,5} = 59,67$$

$$\bar{x}_{y=25,5} = 72,11$$

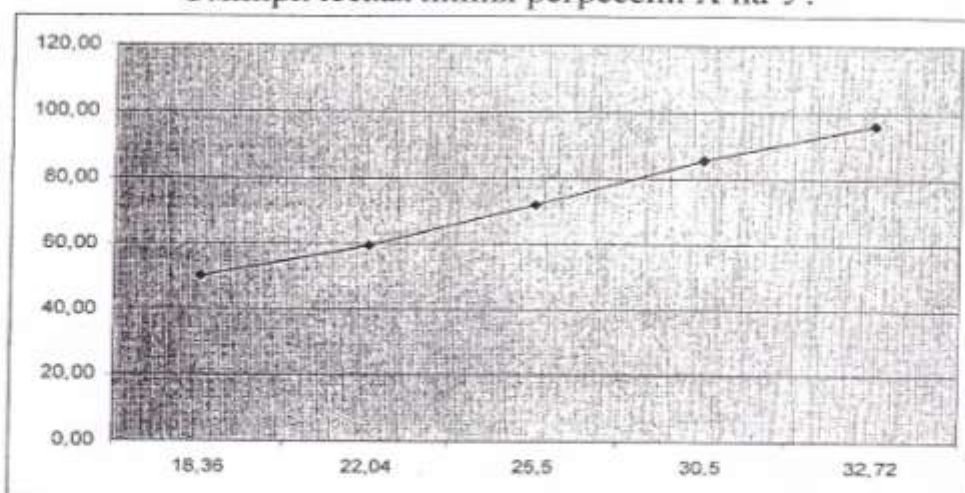
$$\bar{x}_{y=30,5} = 85,57$$

$$\bar{x}_{y=35,5} = 96,11$$

Эмпирическая линия регрессии  $Y$  на  $X$ :



Эмпирическая линия регрессии X на Y:



Составим расчетную таблицу (в нижней строке указаны произведения  $m_{xy}$ ):

| $y$<br>$x$ | 15,5   | 20,5 | 25,5    | 30,5   | 35,5    | $n_x$ | $n_x x$ | $n_x x^2$ |
|------------|--------|------|---------|--------|---------|-------|---------|-----------|
| 41         | 4      | 2    | 1       |        |         | 7     | 287     | 11767     |
|            | 2542   | 1681 | 1045,5  |        |         |       |         |           |
| 57         | 2      | 6    | 4       | 1      |         | 13    | 741     | 42237     |
|            | 1767   | 7011 | 5814    | 1738,5 |         |       |         |           |
| 73         | 1      | 4    | 9       | 4      | 1       | 19    | 1387    | 101251    |
|            | 1131,5 | 5986 | 16753,5 | 8906   | 2591,5  |       |         |           |
| 89         |        |      | 3       | 6      | 3       | 12    | 1068    | 95052     |
|            |        |      | 6808,5  | 16287  | 9478,5  |       |         |           |
| 105        |        |      | 1       | 3      | 5       | 9     | 945     | 99225     |
|            |        |      | 2677,5  | 9607,5 | 18637,5 |       |         |           |
| $n_y$      | 7      | 12   | 18      | 14     | 9       | 60    | 4428    | 349532    |
| $n_y y$    | 108,5  | 246  | 459     | 427    | 319,5   | 1560  | 120464  |           |
| $n_y y^2$  | 1681,8 | 5043 | 11705   | 13024  | 11342,3 | 42795 |         |           |

Найдем выборочные средние:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_x x = \frac{4428}{60} = 73,8$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum n_y y = \frac{1560}{60} = 26$$

Выборочные дисперсии:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum n_x x^2 - \bar{x}^2 = 379,0933$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum n_y y^2 - \bar{y}^2 = 37,25$$

$$\mu = \frac{\sum n_{xy} xy}{n} - \bar{x} \bar{y} = 88,93$$

$$b_{yx} = \frac{\mu}{\sigma_x^2} = \frac{88,93}{379,0933} \approx 0,2346;$$

$$b_{xy} = \frac{\mu}{\sigma_y^2} = \frac{88,93}{37,25} \approx 2,3875$$

$$y_x = b_{yx} x - b_{yx} \bar{x} + \bar{y}$$

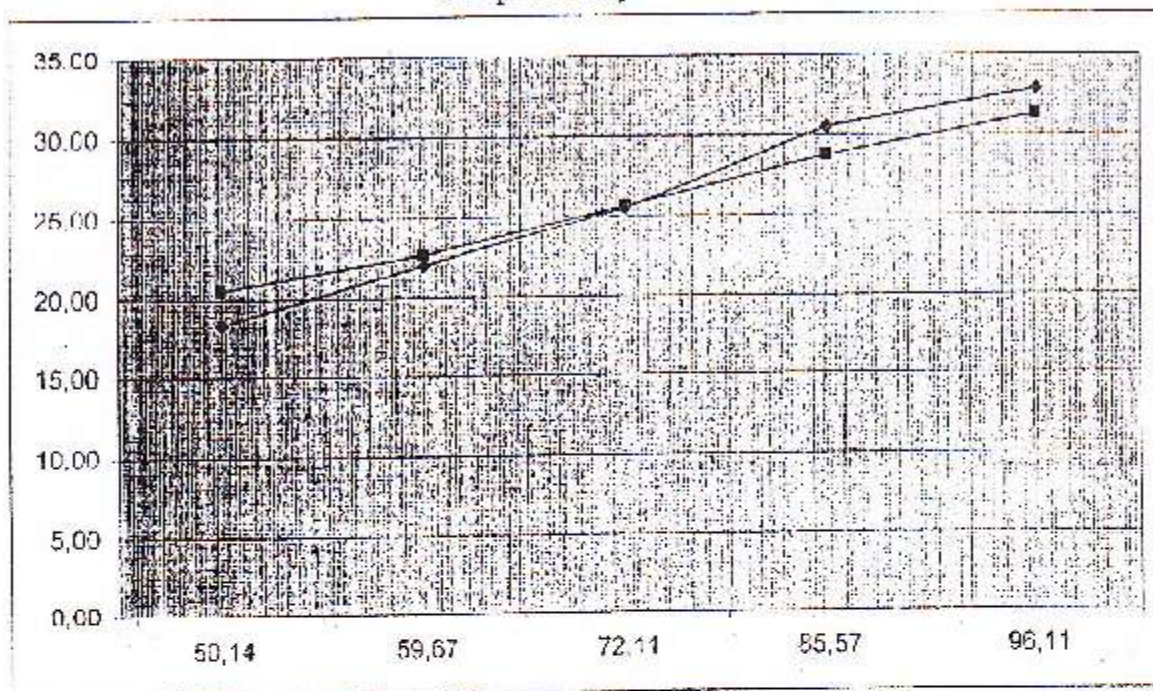
$$y_x = 0,2346x - 0,2346 * 73,8 + 26 = 0,2346x + 8,68652$$

$$x_y = b_{xy} y - b_{xy} \bar{y} + \bar{x}$$

$$x_y = 2,3875y - 2,3875 * 26 + 73,8 = 2,3875y + 11,725$$



Регрессия у на х:



Регрессия x на y:

